第一章　矩阵代数

一个复杂的实际问题往往可以简化或归结为线性方程组的问题.矩阵的研究就来源于线性方程组，线性方程组是研究线性关系的最基本的数学工具，在概率统计、图论、二元关系等数学分支中都有重要的应用. 它在计算机图形学方面也有着重要的作用.

本章将介绍矩阵的基本知识，包括矩阵的运算、行列式的运算和求解线性方程组.

本章学习目标

- 理解行列式的基本概念及性质
- 掌握二、三阶行列的计算
- 理解矩阵的基本概念
- 掌握矩阵的运算
- 熟练掌握矩阵的初等变换
- 掌握线性方程组有解的条件
- 会求简单线性方程组的通解
- 了解矩阵在图形变换中的运用

第一节　行列式

在初等代数中，用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases}$$

由 $① \times a_{22} - ② \times a_{12}$ 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

由 $② \times a_{11} - ① \times a_{21}$ 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

如果未知量 x_1、x_2 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则该线性方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

这极不便于记忆，为此引入二阶行列式的概念.

一、行列式的定义

定义 1.1.1 符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式，它代表 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 这个算式，

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

它由两行两列的 2^2 个元素组成，其中 a_{ij}（i=1，2；j=1，2）称为这个行列式的元素，i 代表 a_{ij} 所在的行数，称为行标；j 代表 a_{ij} 所在的列数，称为列标．如 a_{12} 表示这一元素处在第 1 行第 2 列的位置．

类似地，也可以得到三阶行列式的概念．

定义 1.1.2 符号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为三阶行列式，它代表

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 这一算式，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它由三行三列的 3^2 个元素组成，其中从左上角到右下角这条对角线称为主对角线，从右上角到左下角这条对角线称为次对角线（或副对角线）．

由此可以看出，对于二阶行列式的值，恰好为主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积．

三阶行列式如图 1.1.1 所示．

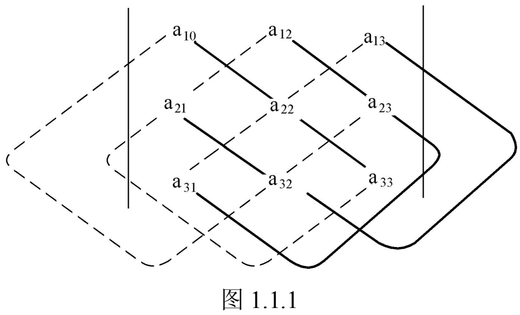

图 1.1.1

每条实线上的 3 个元素之积前加正号，每条虚线上的 3 个元素之积前加负号，最后各项相加就是三阶行列式的值．

这种计算方法称为对角线法，但是，我们要注意该种方法只对二阶、三阶行列式有效，对于 n

阶行列式的展开，等我们学完行列式的性质后再讨论.

例 1.1.1　计算行列式.

（1）$\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

解

（1）$\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-2\times 1 = 1-2 = -1$

（2）$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1\times 1+0\times 3\times 2+(-1)\times(-2)\times 2 -(-1)\times 1\times 2-0\times(-2)\times 1-3\times 3\times 2 = -9$

二、行列式的性质

n 阶行列式：我们记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

它由 n 行、n 列元素（共 n^2 个元素）组成，称之为 n 阶行列式．其中，每一个数 a_{ij} 称为行列式的一个元素，它的前一个下标 i 称为行标，表示这个数 a_{ij} 在第 i 行上；后一个下标 j 称为列标，表示这个数 a_{ij} 在第 j 列上，所以 a_{ij} 在行列式第 i 行和第 j 列的交叉位置上．n 阶行列式 D_n 通常也简记作 $\left|a_{ij}\right|_n$．类似二、三阶行列式，n 阶行列式也表示一个算式，至于 n 阶行列式的具体值如何来计算我们将在下一节中提到.

定义 1.1.3　设有 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将 D 的第 1，2，…，n 行依次变为第 1，2，…，n 列，得到的新行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}，即 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = D$.

性质 1.1.1　行列式经转置以后其值不变，即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

此性质说明在行列式中行与列具有相同的地位．因此，下面的性质，凡是有关行的性质，对于列也同样成立．

性质 1.1.2 交换行列式中任意两行（列）的位置，行列式改变符号．

推论 1.1.1 如果行列式中有两行（列）的对应元素完全相同，那么该行列式等于零．

性质 1.1.3 把行列式的某一行（列）的所有元素同乘以数 k，等于以数 k 乘以该行列式．

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由性质 1.1.3 可得以下推论：

推论 1.1.2 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子，可以提到行列式符号外面．

当性质 1.1.3 中的 $k=0$ 时，就有如下推论：

推论 1.1.3 如果行列式中有一行（列）全为零，那么该行列式等于零．

推论 1.1.4 如果行列式中有两行（列）的元素对应成比例，那么该行列式等于零．

性质 1.1.4 如果行列式的某一行（列）的元素为两组数的和，那么该行列式可以分成两个行列式之和．而且这两个行列式除这一行（列）以外的其他元素与原行列式的对应元素一样．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.1.5 如果以数 k 乘以行列式中的某一行（列）的所有元素然后加到另一行（列）的对应元素上去，所得行列式的值不变．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

说明：今后在进行行列式计算时，为了简明地表达解题过程，也为了便于检查，我们约定，用

（1）r_i 表示第 i 行．

（2）c_j 表示第 j 列．

（3）$kr_i + r_j(kc_i + c_j)$ 表示将第 i 行（列）乘以 k 加到第 j 行（列）上去.

（4）$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示将第 i 行（列）与第 j 行（列）交换位置.

例 1.1.2　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix}$.

解　通过观察发现行列式的第 2 列与第 3 列对应元素成比例，由推论 1.1.4 可知

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = 0 .$$

例 1.1.3　计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

解　通过观察发现行列式的第 2 行恰为第 1 行与第 3 行之和，所以

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1 + r_3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

三、行列式的计算

1．行列式的展开

定义 1.1.4　在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的行和列，余下的元素按原来的相对位置不变构成的行列式称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij} .

在 M_{ij} 前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 后，称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij} ，即 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

例 1.1.4　设 $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$，求出元素 a_{21} 、 a_{32} 的余子式和代数余子式.

解　元素 a_{21} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -26 \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

定理 1.1.1 拉普拉斯展开定理

n 阶行列式 D 等于其任意一行（列）中的各元素与其代数余子式的乘积之和．即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad（i=1，2，\ldots，n）$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad（j=1，2，\ldots，n）$$

这个定理称为拉普拉斯定理，利用此定理可以进行降阶运算．但在计算行列式时，直接利用此定理进行行列式展开并不一定能简化运算，而当行列式中某一行或某一列中含有较多零时，运用此定理将会非常简便．

推论 1.1.5 当 n 阶行列式 D 的第 i 行（或第 j 列）中只有一个非零元素 a_{ij} 时 $D=a_{ij}A_{ij}$．

例如：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=5\times\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}=5\times5\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=550$$

2．行列式的计算

行列式的计算方法主要有以下几种：

（1）对二阶、三阶行列式通常应用对角线法直接求值．

（2）对于高阶行列式可以利用行列式的性质，将其转化为三角形行列式，再求其值．

（3）利用行列式的展开，可以使行列式的阶数降低，从而简化其运算过程，特别是当某行（列）中含有较多个零元素时常用此法．

例 1.1.5 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 的值．

解

$$D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2-2r_1,r_4-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+2r_3}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{r_3-3r_2,r_4+3r_2}-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-11r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -39 \end{vmatrix}$$

$$= -(1\times1\times1\times(-39)) = 39$$

例 1.1.6　求行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解　我们发现除了主对角线外，其他元素都是 1，另外，每列元素的和都是 8，因此，将第 4 行、第 3 行、第 2 行同时加到第 1 行，再提出公因式 8，即

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\div 8} 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,r_3-r_1,r_4-r_1} 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\times1\times4\times4\times4 = 512$$

例 1.1.7　证明：n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上元素全为 0）.

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明　对 n 作数学归纳法，当 $n=2$ 时，结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立，则由定义得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式，根据归纳假设得

$$D_n = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$$

同理可证，n 阶对角行列式（非主对角线上元素全为 0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

又根据性质 1.1.1 有 n 阶上三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 1.1.7 的结论非常重要，以后对于行列式的计算，主要是利用其性质和本结论来计算的.

四、克拉默法则

我们已经知道二元线性方程组的解与行列式有着密切相关的联系，本节主要介绍 n 元线性方程组的解的公式，这是行列式理论的一个非常重要的应用.

设含有 n 个未知量，n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中方程组（1.1.1）中的未知量系数在保持原来的相对位置不变的情况下构成的 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为方程组（1.1.1）的系数行列式，记作 $\det D$.

定理 1.1.2 克拉默法则

若 n 元线性方程组（1.1.1）的系数行列式 $D \neq 0$，那么此方程组有唯一解，且 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，…，$x_n = \dfrac{D_n}{D}$，其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列的元素用方程组的常数项 b_1，b_2，…，b_n 替换而得到的 n 阶行列式.

例 1.1.8 用克拉默法则解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 = 9 \\ 2x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$.

解 该方程组的系数行列式为 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

因为 $D \neq 0$，所以该方程组有唯一解.

又由于 $D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 \\ 9 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 18$，$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 15$，$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 15$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -6$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -5$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D} = -5$

克拉默法则给出了线性方程组的解与其系数、常数项之间的重要关系．但它只适用于方程个数与未知量个数相等，且系数行列式不等于零的线性方程组.

当线性方程组（1.1.1）的常数项全为零时，有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

称方程组（1.1.2）为齐次线性方程组，否则，称为非齐次线性方程组.

显然，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 就是（1.1.2）式的一个解．那么，它除了零解以外是否还有其他非零解呢？

由克拉默法则可以得出：若（1.1.2）式的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有唯一零解；若方程组有非零解，则系数行列式 D 必为零.

推论 1.1.6　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 D=0.

例 1.1.9　讨论方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 解的情况.

解　因为 $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$，所以，当 $\lambda = 1$ 时，$D = 0$，此时方程组有非零解；当 $\lambda \neq 1$ 时，$D \neq 0$，此时方程组有唯一的零解.

习　　题

一、选择题

1．三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{21} 的代数余子式 A_{21}=（　　）.

A．-2　　B．-1　　C．-1　　D．2

2．已知$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，那么$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）．

A．-24　　B．-12　　C．-6　　D．12

3．已知行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}=0$，则数 $a=$（　　）．

A．-3　　B．-2　　C．2　　D．3

二、填空题

1．设三阶行列式 D_3 的第 2 列元素分别为 1，-2，3，对应的代数余子式分别为-3，2，1，则 D_3=________．

2．已知行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=1$，则$\begin{vmatrix} a_1 & a_1-b_1 & a_1-b_1+c_1 \\ a_2 & a_2-b_2 & a_2-b_2+c_2 \\ a_3 & a_3-b_3 & a_3-b_3+c_3 \end{vmatrix}=$________．

三、计算题

1．用对角线算法计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$　　（6）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

2．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

3．证明下列等式：

（1）$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2$　　（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & b & h \\ d & a & g \\ f & c & k \end{vmatrix}$

4．求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$．

5．求解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

6．当 a 为何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解？

第二节　矩阵的概念及矩阵的运算

一、矩阵的概念

1. 矩阵的定义

定义 1.2.1　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的长方形数表，并用括弧“()”括起来，形如 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 的数表，我们称之为矩阵．一般用大写英文字母 A、B、C 等来表示．

上面的矩阵也可以简记为 $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素．

有些特殊矩阵是我们经常碰见的：

（1）当 $m=1$ 时，矩阵只有一行，形如 $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$，称为行矩阵．

（2）当 $n=1$ 时，矩阵只有一列，形如 $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，称为列矩阵．

（3）当 $m=n$ 时，矩阵的行数等于列数，即

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$，称为 n 阶方阵，记作 A_n.

（4）我们把方阵左上角到右下角的对角线称为主对角线，右上角到左下角的对角线称为次对角线. 一个方阵除主对角线外其他元素均为零的称为对角矩阵；主对角线上方的元素全部为零的方阵称为下三角矩阵；主对角线下方的元素全部为零的方阵称为上三角矩阵；上三角矩阵和下三角矩阵统称为三角矩阵. 如矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ * & * & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，就是 n 阶下三角矩阵.

（5）主对角线上元素均为 1 的 n 阶对角矩阵 $E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$，称为 n 阶单位矩阵.

（6）所有元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作 $0_{m\times n}$， 例如 $0_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

（7）矩阵中元素全为零的行被称为零行，如果零行均排在矩阵的非零行的下面，且各行首非零元素前的零元素个数随行数增加而增加，这样的矩阵叫做阶梯形矩阵. 若每行首非零元素均为 1，且所在列的其他元素均为 0 的阶梯形矩阵，我们称为最简阶梯形矩阵.

例如 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 就是一个阶梯形矩阵，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 就是一个最简阶梯形矩阵.

2. 矩阵相等与矩阵转置

定义 1.2.2 若两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{s\times t}$ 满足：

（1） $m=s$，$n=t$

（2） $a_{ij}=b_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)

则称矩阵 A 和 B 相等，记为 $A=B$.

例 1.2.1 已知 $A=B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & x+y \\ x-3y & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b+2a & 7 \\ -5 & 2a-b-3 \end{pmatrix}$

试求出 x、y、a、b.

解 由矩阵相等得：$\begin{cases} 3=b+2a \\ x+y=7 \\ x-3y=-5 \\ a=2a-b-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ x=4 \\ y=3 \end{cases}$

定义 1.2.3 将一个 $m\times n$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 的行和列互换得到一个 $n\times m$ 的矩阵，称为 A 的转置矩阵，记作 A^{T}，即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

显然，矩阵的转置具有反身性：$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加（减）法与数乘运算

定义 1.2.4 把行数与列数分别相等的两个矩阵的对应元素相加（减）而得到的矩阵，称为两矩阵的和（差）.

例 1.2.2 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 & 5 \\ 8 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$，求 $A+B$、$A-B$.

解

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 & 5 \\ 8 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 & 5 \\ 8 & -6 & 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 8 & -5 \\ -13 & 12 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

定义 1.2.5 用一个数乘以矩阵的每一个元素而得到的矩阵，称为数乘矩阵.

例 1.2.3 已知 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 6 & -9 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$，求 $5A$.

解 $5A=5\begin{pmatrix}-2&4&6\\6&-9&0\\3&-5&1\\6&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&20&30\\30&-45&0\\15&-25&5\\30&40&20\end{pmatrix}$

2. 矩阵的乘法运算

定义 1.2.6 两个矩阵的乘积是将左边矩阵第 i 行的每一个元素乘以右边矩阵第 j 列的对应元素之积的和作为乘积矩阵中的第 i 行第 j 列元素，左边矩阵的每一行遍乘右边矩阵的每一列即可获得乘积矩阵，即设有 $A=(a_{ik})_{m\times l}$，$B=(b_{kj})_{l\times n}$，则 $AB=A\times B=(a_{ik})_{m\times l}\times(b_{kj})_{l\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

$$（i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n）$$

例 1.2.4 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\\3&6\end{pmatrix}$，计算 AB、BA .

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\\3&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times2+3\times1+(-2)\times3 & 1\times(-3)+3\times(-1)+(-2)\times6\\2\times2+0\times1+5\times3 & 2\times(-3)+0\times(-1)+5\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-18\\19&24\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&0&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+(-3)\times2 & 2\times3+(-3)\times0 & 2\times(-2)+(-3)\times5\\1\times1+(-1)\times2 & 1\times3+(-1)\times0 & 1\times(-2)+(-1)\times5\\3\times1+6\times2 & 3\times3+6\times0 & 3\times(-2)+6\times5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&6&-19\\-1&3&-7\\15&9&24\end{pmatrix}$$

由此例可知 $AB\neq BA$. 一般情况下，矩阵乘法不满足交换律，但矩阵乘法有如下运算律：

（1）结合律：$(AB)C=A(BC)$

$k(AB)=(kA)B=A(kB)$

（2）分配律：$(A+B)C=AC+BC$

$$C(A+B)=CA+CB$$

另外，根据矩阵运算的转置有如下性质：

（1）$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

（2）$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$

（3）$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

3. 方阵的行列式

所谓方阵 A 的行列式，简单一点来讲，就是将矩阵的符号改成行列式的符号，其余不变，方阵 A 的行列式记做 $|A|$ 或 $\det A$.

例如，方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ 的行列式就是 $|A|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-5$.

另外，方阵的行列式有如下性质：设 A、B 为 n 阶方阵，k 为实数，则：

（1）$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$

（2）$|kA|=k^{n}|A|$

（3）$|AB|=|A||B|$

三、矩阵的初等变换

定义 1.2.7　对矩阵的行实施如下 3 种变换，称为矩阵的初等行变换：

（1）互换变换：交换矩阵的两行（用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行互换）.

（2）倍乘变换：用一非零数遍乘矩阵的某一行（用 kr_i 表示用非零数 k 乘以第 i 行）.

（3）倍加变换：将矩阵的某一行遍乘数 k 后加到另一行（用 r_j+kr_i 表示第 i 行的 k 倍加到第 j 行）．相应地，在初等行变换中将行改为列，称为初等列变换．初等行变换与初等列变换统称为初等变换．

我们只需用到矩阵的初等行变换，并且有结论：矩阵经过初等行变换后，总能化为阶梯矩阵．

例 1.2.5　利用矩阵的初等行变换，将下列矩阵变换为阶梯矩阵．

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 8 & 2\end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$

解

（1）$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 3 & 6 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 8 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（2）$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

四、矩阵的秩

从矩阵 A 中取 k 行 k 列，位于这些行、列交叉处的元素按原来的次序构成的 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式.

例如，在矩阵$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -11 & -3 \end{pmatrix}$中，取第 1、3 行与第 1、4 列交叉处的元素构成的二阶行列式$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$为 A 的二阶子式.

定义 1.2.8 在阶梯矩阵 A 中非零行的个数 r 称为阶梯矩阵的秩，记作

$$R(A) = r$$

上述的定义给出了阶梯矩阵的秩，那么对于任意一个矩阵的秩如何去求呢？

我们知道任何一个矩阵都可以通过初等行变换把它变成一个阶梯矩阵，如果我们能够确定在这些变换过程中矩阵的秩一直都没有改变的话，那么任何一个矩阵的秩也就很好求了，事实上，在线性代数中，有这样一个结论：矩阵的初等变换不会改变矩阵的秩.

例 1.2.6 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$的秩.

解 只要将矩阵转换为阶梯矩阵即可找到矩阵的秩.

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -39 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

所以 $R(A) = R(B) = 2$.

例 1.2.7 求例 1.2.6 中转置矩阵 A^{T} 的秩.

解

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-4&-2&-2\\3&1&4\\-3&5&-34\\5&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-4&-2&-2\\3&1&4\\-3&5&-34\\5&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_5-5r_1]{\substack{r_2+4r_1\\r_4+r_3}}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\\3&1&4\\0&6&-30\\0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\0&6&-30\\0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_5+r_3]{r_4+12r_3}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A^{\mathrm{T}})=2$.

由例 1.2.6 和例 1.2.7 的结果可知：一个矩阵和它的转置矩阵具有相同的秩.

五、逆矩阵

我们知道当 $m=n$ 时，矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 被称为方阵．方阵除了具有一般矩阵的运算外，它还有特殊运算.

一般的矩阵乘法是不满足交换律的，那么特殊情况下矩阵乘法有没有交换律呢？回答是肯定的.

定义 1.2.9 对于 n 阶方阵 A ，如果存在另一个 n 阶方阵 B ，使 $AB=BA=E$ ，则称矩阵 A 可逆， B 为 A 的逆矩阵（简称逆阵），记作 $B=A^{-1}$.

显然，若 B 是 A 的逆矩阵，那么 A 也是 B 的逆矩阵，即 A 与 B 互为逆矩阵.

例 1.2.8 已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$ ，验证 $B=A^{-1}$.

证明 由

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

可知 $AB = BA = E$，故 $B = A^{-1}$.

那么，是否所有的方阵都有逆矩阵呢？回答是否定的．对于方阵我们有如下结论：n 阶方阵的秩为 n 时必可逆，且逆矩阵是唯一的．

例 1.2.9　判断方阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&1\\4&1&8\\5&2&3\end{pmatrix}$ 是否有逆矩阵.

解　$$A=\begin{pmatrix}5&2&1\\4&1&8\\5&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}5&2&1\\4&1&8\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-7\\4&1&8\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&1&-7\\0&-3&36\\0&0&2\end{pmatrix}$$

此为阶梯矩阵，故 $R(A)=3=n$，亦即此矩阵有逆矩阵.

如何求逆矩阵呢？我们用宽矩阵的方法：将一可逆矩阵右旁附带一同阶单位方阵，对此宽阵只实施初等行变换，将此矩阵变换为单位矩阵的同时右旁的单位矩阵即变换为原矩阵的逆矩阵，即 $(AE)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(EA^{-1})$.

例 1.2.10　求例 1.2.9 中矩阵的逆矩阵.

解　$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&2&1&1&0&0\\4&1&8&0&1&0\\5&2&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&2&1&1&0&0\\4&1&8&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-7&1&-1&0\\4&1&8&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-4r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-7&1&-1&0\\0&-3&36&-4&5&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}r_3]{-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-7&1&-1&0\\0&1&-12&\frac{4}{3}&-\frac{5}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&-12&\frac{4}{3}&-\frac{5}{3}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+12r_3]{r_1-5r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{13}{6}&\frac{2}{3}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&-\frac{14}{3}&-\frac{5}{3}&6\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{14}{3} & -\frac{5}{3} & 6 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

例 1.2.11　已知矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解　易得 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，故方程两边同时左乘 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}$

得到 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$（注意：$EX=XE=X$）

所以 $X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix}$.

习　　题

一、选择题

1．若 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，则下列矩阵运算的结果为 3×2 矩阵的是（　）.

A．ABC　　B．$AC^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$　　C．CBA　　D．$C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

2．设 A 为二阶矩阵，若 $|3A|=3$，则 $|2A|=$（　）.

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{4}{3}$　　D．2

3．设 A、B 都是 n 阶方阵，且 $|A|=3$，$|B|=-1$，则 $|A^{\mathrm{T}}B^{-1}|=$（　）.

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

4．设 A、B、C 为同阶方阵，下面矩阵的运算中不成立的是（　）.

A．$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$　　B．$|AB|=|A||B|$

C．$A(B+C)=BA+CA$　　D．$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

二、填空题

1．设 $A=$（1，3，−1），$B=$（2，1），则 $A^{\mathrm{T}}B=$________.

2．两个矩阵 $A_{m\times l}$ 与 $B_{k\times n}$ 相乘要求 l ________ k.

3．已知矩阵方程 $XA=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，则 X=________.

三、计算题

1．设 $A=\begin{pmatrix}2&4&1\\0&3&5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&0&5\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&1&2\\-3&-1&3\end{pmatrix}$，求 $3A-2B+C$.

2．计算下列矩阵：

（1）$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(1\quad 3\quad 2)$ （2）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&3\\7&9\end{pmatrix}$

3．求矩阵的秩.

（1）$\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}$

4．求矩阵的逆矩阵.

（1）$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，其中 $ad-bc\neq 0$ （2）$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}$

5．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}$ （2）$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&4\end{pmatrix}$

第三节　线性方程组

一、线性方程组的基本概念和定理

所谓一般线性方程组是指形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{cases}\tag{1.3.1}$$

的方程组，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 代表 n 个未知量，s 是方程的个数，$a_{ij}(\ i=1,2,\cdots,s;\quad j=1,2,\cdots,n)$ 称为线性方程组的系数，$b_j(\ j=1,2,\cdots,s)$ 称为常数项．方程组中未知量的个数 n 与方程的个数 s 不一定相等．系数 a_{ij} 的第一个指标 i 表示它在第 i 个方程，第二个指标 j 表示它是 x_j 的系数．

方程组（1.3.1）可写成矩阵的形式：$Ax=b$，式中矩阵 A 是方程组的系数矩阵，矩阵 $\overline{A}=[Ab]$ 称为方程组的增广矩阵．

我们在第一节学习了当方程组的系数矩阵 A 为方阵时的情形，下面就来介绍如何求解一般线性方程组．

定理 1.3.1（线性方程组有解判别定理）　已知线性方程组（1.3.1）的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \text{与增广矩阵 } \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

的秩分别为 $R(A)$ 和 $R(\overline{A})$，则

（1）当 $R(A)=R(\overline{A})=r$ 时方程组有解，此时也称方程组是相容的，且当 $r=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r<n$ 时，方程组有无数组解．

（2）当 $R(A)\neq R(\overline{A})$ 时方程组无解，此时也称方程组是不相容的．

例 1.3.1　当 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+\lambda x_3=2 \\ 2x_1+\dfrac{4}{3}\lambda x_2+6x_3=4 \\ \lambda x_1+6x_2+9x_3=6 \end{cases}$

（1）无解　（2）有唯一解　（3）有无穷多解．

解　将增广矩阵化为上阶梯形

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 2 \\ 2 & \frac{4}{3}\lambda & 6 & 4 \\ \lambda & 6 & 9 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 2 \\ 0 & \frac{4}{3}\lambda-4 & 6-2\lambda & 0 \\ 0 & 6-2\lambda & 9-\lambda^2 & 6-2\lambda \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 2 \\ 0 & \frac{4}{3}\lambda-4 & 6-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+6)(3-\lambda) & 2(3-\lambda) \end{array}\right)$$

由定理 1.3.1 可得出如下结论：

（1）当 $\lambda=-6$ 时，$R(A)<R(\overline{A})$，故方程组无解．

（2）当 $\lambda\neq-6$，$\lambda\neq3$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=3$，方程组有唯一解．

（3）当 $\lambda=3$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=1$，有无穷多解．

二、线性方程组解的结构

当方程组（1.3.1）的$b_1=0,\ b_2=0,\ldots,\ b_s=0$时，我们把方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{1.3.2}$$

称为齐次线性方程组，否则称方程组为非齐次线性方程组．

对于齐次线性方程组，解的线性组合还是方程组的解．这个性质说明了，如果方程组有几个解，那么这些解的所有可能的线性组合就给出了很多的解．基于这个事实，我们要问：齐次线性方程组的全部解是否能够通过它的有限的几个解的线性组合给出？

定义 1.3.1 齐次线性方程组（1.3.2）的一组解$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$称为方程组（1.3.2）的一个基础解系，如果满足下面的两个条件：

（1）方程组（1.3.2）的任一个解α都能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$的线性组合，即存在这样一组数$k_1,k_2,\cdots,k_t$，使得$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$．

（2）$t=n-r$，其中r为方程组（1.3.2）的系数矩阵的秩，n为方程组（1.3.2）中未知数的个数．

我们把基础解系$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$的线性组合$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$（其中$k_1,k_2,\cdots,k_t$为任意常数）称为方程组的通解．

那么，如何去求方程组（1.3.2）的通解呢？由上面的讨论我们知道，要求通解，最重要的就是确定方程组（1.3.2）的基础解系．下面，我们就通过例题来说明如何去求基础解系．

例 1.3.2 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1-x_2+5x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-x_2+8x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-9x_3+7x_4=0 \end{cases}$的一个基础解系和通解．

解 先用行初等变换将方程组的系数矩阵变为最简阶梯形矩阵．

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -14 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

然后将它还原成方程组的形式（可以通过严格的理论推导得出，它与原方程组同解）：

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

并将该方程组整理成如下形式：

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{7}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_3 = 1x_3 + 0x_4 \\ x_4 = 0x_3 + 1x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

列矩阵$\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$就是我们所要求的一组基础解系.

所以该方程组的通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

通过上面的例题，我们可以总结出解方程组（1.3.2）的步骤：

（1）先用初等行变换将系数矩阵化成最简阶梯形矩阵.

（2）将最简阶梯形矩阵改写成方程组的形式，并整理成列矩阵的形式.

（3）写出基础解系，并写出其通解.

三、非齐次线性方程组的解的结构

定理 1.3.2　如果α_0是非齐次线性方程组（1.3.1）的一个特解，那么线性方程组（1.3.1）的任意一个解γ都可以表示成$\gamma = \alpha_0 + \alpha$，其中$\alpha$是方程组（1.3.1）对应的齐次方程组（1.3.2）的一个解.

由定理 1.3.2 知：要求解方程组（1.3.1）的通解γ，只要求出其一个特解α_0和其对应的齐次方程组（1.3.2）的通解α，即$\gamma = \alpha_0 + \alpha$.

我们已经知道如何去求方程组（1.3.2）的通解α了，那么我们如何去求方程组（1.3.1）的特解呢？

下面，我们仍然用例题来加以说明.

例 1.3.3 求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_4=5 \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4 \end{cases}$的通解.

解 先用初等行变换将增广矩阵化成最简阶梯形矩阵.

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于$R(\overline{A})=R(A)=2$，所以方程组有解，将上面的最简阶梯形矩阵化成方程组的形式：

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_4+2 \\ x_3=x_4+1 \end{cases}$$

并将方程组写成如下形式：

$$\begin{cases} x_1=-2x_2-x_4+2 \\ x_2=1x_2+0x_4+0 \\ x_3=0x_2+x_4+1 \\ x_4=0x_2+1x_4+0 \end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

列矩阵$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$就是方程组的一个特解，$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$就是方程组对应的齐次线性方程组的基础解系.

所以，该方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

习　　题

一、选择题

1．若四阶方阵的秩为 3，则（　　）.

A．A 为可逆阵　　B．齐次方程组 Ax=0 有非零解

C．齐次方程组 Ax=0 只有零解　　D．非齐次方程组 Ax=b 必有解

2．设 A 为 m×n 矩阵，则 n 元齐次线性方程组 Ax=0 有非零解的充分必要条件是（　　）.

A．$r(A)=n$　　　　B．$r(A)=m$　　　　C．$r(A)<n$　　　　D．$r(A)<m$

二、填空题

1．已知三元非齐次线性方程组的增广矩阵为$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & a+1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a+1 & 0\end{array}\right)$，若该方程组无解，则$a$的取值为________.

2．三元齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_2+x_3=0\end{cases}$的基础解系中所含解向量的个数为________.

三、计算题

1．判断下列方程组是否有解，若有解，求出其解.

（1）$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\ 3x_1-x_2+2x_3=10\\ x_1+3x_2=8\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}5x_1+4x_3+2x_4=3\\ x_1-x_2+2x_3+x_4=1\\ 4x_1+x_2+2x_3=1\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$

2．求齐次线性方程组$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0\\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$的一个基础解系和它的通解.

3．求方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1\end{cases}$的通解.

4．（电路分析）在如图 1.3.1 所示的电路中应用基尔霍夫定律，得到如下方程，求各个部分的电流强度（单位：安培）.

$$\begin{cases}I_A+I_B+I_C+I_D=0\\ I_A-I_B=-1\\ 2I_C-2I_D=-2\\ I_B-2I_C=6\end{cases}$$

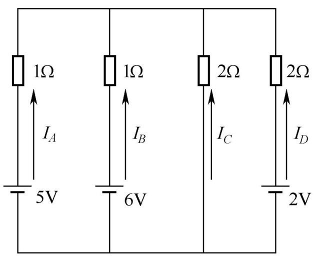

图 1.3.1

第四节　矩阵在图形变换中的应用

几何图形变换是计算机辅助图形设计中的最基本技术，有着很广泛的应用．为了把二维、三维以及更高维度空间中的一个点集从一个坐标系变到另一个坐标系，要利用空间中点的齐次坐标表示，所谓齐次坐标表示法就是将一个原本是 n 维的向量用一个 n+1 维向量来表示．

例如：二维坐标点 $P(x,y)$ 的齐次坐标为：(hx,hy,h)．其中，h 是任一不为 0 的比例系数.通常为方便起见，我们取 h=1.

如果用 $P=[x\ \ y\ \ 1]$ 表示 XY 平面上一个未被变换的点，用 $P'=[x'\ y'\ 1]$ 表示 P 点经某种变换后的新点，用一个 3×3 矩阵 T 表示变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

则图形变换可以统一表示为：$P'=P\times T$．

一、常见的几种二维几何变换矩阵

1．平移变换

平移是一种不产生变形而移动物体的刚体变换．

假定从点 P 平移到点 P'，点 P 沿 X 方向的平移量为 m，沿 Y 方向的平移量为 n，如图 1.4.1 所示．

$$\begin{cases} x'=x+m \\ y'=y+n \end{cases}$$

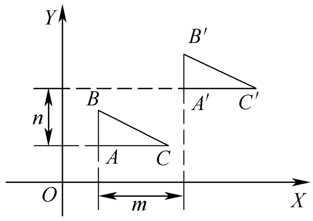

图 1.4.1

用齐次坐标可以表示为：

$$(x',y',1)=(x,y,1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$$

$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}$ 称为平移矩阵.

2．旋转变换

基本的旋转变换是指将图形围绕圆心逆时针转动一个θ角度的变换.

假定从P点绕原点逆时针旋转θ角到P'点.

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

用齐次坐标可以表示为：

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$为旋转距阵.

3．比例变换

基本的比例变换是指图形相对于坐标原点，按比例系数(S_x, S_y)放大或缩小的变换.

假定点P相对于坐标原点沿X方向缩放S_x倍，沿Y方向缩放S_y倍，如图 1.4.2 所示.

$$\begin{cases} x' = x \cdot S_x \\ y' = y \cdot S_y \end{cases}$$

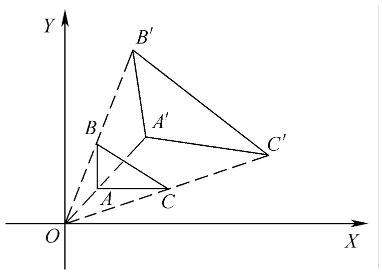

图 1.4.2

用齐次坐标表示为：

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S(S_x, S_y) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$为变比矩阵.

4．对称变换

（1）关于X轴的对称变换

点$P(x, y)$关于X轴的对称点为$P'(x, -y)$，构造对称矩阵T，如图 1.4.3 所示：

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

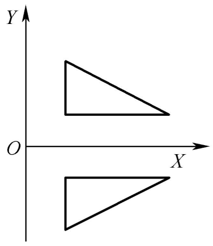

图 1.4.3

（2）关于 Y 轴的对称变换

点 $P(x,y)$ 关于 Y 轴的对称点为 $P'(-x,y)$，构造对称矩阵 T，如图 1.4.4 所示：

$$T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

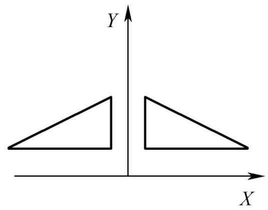

图 1.4.4

（3）关于坐标原点的对称变换

点 $P(x,y)$ 关于坐标原点的对称点为 $P'(-x,-y)$，构造对称矩阵 T，如图 1.4.5 所示：

$$T=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

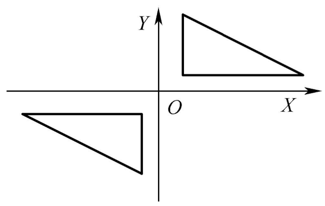

图 1.4.5

二、三维图形的基本变换矩阵

如果用$P=[x\ \ y\ \ z\ \ 1]$表示三维空间上一个未被变换的点，用$P'=[x'\ \ y'\ \ z'\ \ 1]$表示 P 点经某种变换后的新点，用一个4×4矩阵T表示变换矩阵：

$$T=\begin{bmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ g & h & i & r \\ l & m & n & s \end{bmatrix}$$

则图形变换可以统一表示为：$P'=P\cdot T$.

1. 平移变换

假定从点P平移到点P'，点P沿X方向的平移量为l，点P沿Y方向的平移量为m，沿Z方向的平移量为n，则可构造平移矩阵T：

$$T(l,m,n)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}$$

2. 变比变换

假定点P相对于坐标原点沿X方向缩放S_x倍，沿Y方向缩放S_y倍，沿Z方向缩放S_z倍，其中S_x、S_y和S_z称为比例系数，则可构造比例矩阵：

$$S(S_x,S_y,S_z)=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 旋转变换

下面讨论的三种基本旋转变换，都是考虑在右手坐标系下，某点绕坐标轴逆时针旋转θ角的情况.

（1）绕Z轴旋转

构造旋转矩阵：

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）绕X轴旋转

构造旋转矩阵：

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（3）绕 Y 轴旋转

构造旋转矩阵：

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

对于任何一个比较复杂的变换，都可以转换成若干个连续进行的基本变换．这些基本几何变换的组合称为复合变换，也称为级联变换．设图形经过 n 次基本几何变换，其变换矩阵分别为 $T_1,T_2,\cdots,T_n$，则称 $T=T_1\cdot T_2\cdot\cdots\cdot T_n$ 为复合变换矩阵．

例 1.4.1 试制作一个三角形沿一个圆周旋转的动画，要求旋转过程中三角形与圆的相对位置关系不变．

解 以圆周的圆心为原点，建立坐标系，假设三角形的顶点坐标为(1,0)，(1,1.5)，(2.5,0)，则相应的齐次坐标为((1,0,1)(1,1.5,1)(2.5,0,1))．

设旋转角度为θ，即相当于乘以齐次变换矩阵

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

旋转过程中三角形与圆的相对位置关系不变，即要求三角形上的每个点都要旋转．由于没变形，只要对三角形的各顶点旋转相应角度连线就行了．读者可以用编程语言来实现．

本章小结

1．二三阶行列式的计算（对角线法则）

二阶行列式：$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

2．高阶行列式计算

（1）拉普拉斯展开定理

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1，2，\ldots，n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1，2，\ldots，n)$$

（2）对于高阶行列式可以利用行列式的性质，将其转化为三角形行列式，再求其值.

3．克拉默法则求解线性方程组

克拉默法则：若 n 元线性方程组（形式上方程的个数与未知量的个数相等）系数行列式 $D \neq 0$，那么此方程组有唯一解，且 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，…，$x_n = \dfrac{D_n}{D}$，其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列的元素，用方程组的常数项 b_1，b_2，…，b_n 替换而得到的 n 阶行列式.

4．矩阵的概念，熟练掌握矩阵的运算（包括线性运算、乘法、方阵的转置和求逆矩阵）及其相关性质.

5．矩阵的初等变换：初等行变换与初等列变换统称为初等变换，包括：互换变换、倍乘变换、倍加变换．能够利用初等行变换将矩阵化为行阶梯形矩阵.

6．矩阵秩的定义，解矩阵的秩.

7．非齐次线性方程组有解的判定：

已知线性方程组非齐次线性方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

与增广矩阵 $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$

的秩分别为 $R(A)$ 和 $R(\overline{A})$，则

（1）当 $R(A) = R(\overline{A}) = r$ 时方程组有解，此时也称方程组是相容的，且当 $r = n$ 时，方程组有唯一解；当 $r < n$ 时，方程组有无数组解.

（2）当 $R(A) \neq R(\overline{A})$ 时方程组无解，此时也称方程组是不相容的.

8．线性方程组的基础解系的概念，并能够求解.

9．非齐次线性方程组解的结构并能求其通解.

如果 α_0 是非齐次线性方程组的一个特解，那么线性方程组的任意一个解 γ 都可以表示成 $\gamma = \alpha_0 + \alpha$，其中 α 是方程组对应的齐次方程组的一个解.

所以要求解非齐次方程组的通解 γ，只要求出其一个特解 α_0 和其对应的齐次方程组的通解 α，即 $\gamma = \alpha_0 + \alpha$.

10．几何变换的齐次变换矩阵.

复习题一

一、选择题

1．已知行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & a \end{vmatrix}$=0，则数$a=$（　　）.

A．−3　　B．−2　　C．2　　D．3

2. 设行列式$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则行列式$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$（　　）.

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．2　　D．$\frac{8}{3}$

3．行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$第二行第一列元素的代数余子式$A_{21}=$（　　）.

A．−2　　B．−1　　C．1　　D．2

4．设A是4×6矩阵，$r(A)=2$，则齐次线性方程组Ax=0的基础解系中所含向量的个数是（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题

1．若，则$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$，$k=$________.

2．行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{vmatrix}$=________.

3．已知行列式$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 \end{vmatrix}=-4$，则$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=$________.

4．设α_1、α_2是非齐次线性方程组$Ax=b$的解，则A（$5\alpha_2$-$4\alpha_1$）=________.

5．设α=（1，1，-1），β=（-2，1，0），γ=（-1，-2，1），则3α-β+5γ=________.

6．设齐次线性方程Ax=0有解ξ，而非齐次线性方程$Ax=b$有解η，则$\xi+\eta$是方程组________的解.

三、计算题

1．计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

2．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & -4 & 11 & 12 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} a-5 & -2 & 4 \\ -2 & a-2 & 2 \\ 4 & 2 & a-5 \end{vmatrix}$

3．用行列式的性质证明：

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

（2）$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

4．试求下列方程的根：

（1）$\begin{vmatrix} \lambda-6 & 5 & 3 \\ -3 & \lambda+2 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$

5．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$

6．解下列方程组：

（1）$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-10 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

7．已知$2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}+3X-\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=0$，求矩阵$X$.

8．计算下列矩阵：

（1）$(2\quad 1\quad 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}(2\quad -1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

9．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求：

（1）$AB-3B$；　（2）$AB-BA$；　（3）$(A-B)(A+B)$；　（4）A^2-B^2

10．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$，试计算行列式$|2(A-B)^{\mathrm{T}}+B|$的值.

11．求矩阵的逆矩阵：

（1）$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　（2）$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12．解下列矩阵方程：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

13．求下列矩阵的秩：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

14．问能否适当选取矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -3 & 9 \\ -2 & 4 & 2 & k \end{pmatrix}$ 中的 k 的值，使：

（1）$r(A)=1$；　（2）$r(A)=2$；　（3）$r(A)=3$

15．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \\ 4 & y \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} u & 1 \\ v & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & w \\ 1 & 3 \\ t & 2 \end{pmatrix}$，且 $A+B=C$，求 x、y、u、v、w、t.

16．求逆矩阵：

（1）$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

17．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

（1）设 $AX-2A+5E=0$，求 X.　（2）设 $AX=A+2X$，求 X.

18．判断下列方程组是否有解，若有解，求出其解.

（1）$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4 \\ x_1-2x_2+4x_3=-5 \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13 \\ 4x_1-x_2+9x_3=-6 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4 \\ x_1+2x_2-3x_3+3x_4=-2 \end{cases}$

19．求齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0 \\ -x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+15x_2-7x_3+9x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

20．问 k 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+kx_2+x_3=k \\ x_1+x_2+kx_3=k^2 \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多个解？有解时请求出它的解.

21．当 k 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}(k-2)x_1-3x_2-2x_3=0\\-x_1+(k-8)x_2-2x_3=0\\2x_1+14x_2+(k+3)x_3=0\end{cases}$

有非零解？并求出它的一般解.

22．求下列齐次线性方程组的一个基础解系和它的通解：

（1）$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0\\3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0\\4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0\end{cases}$

（2）$\begin{cases}2x_1-5x_2+x_3-3x_4=0\\-3x_1+4x_2-2x_3+x_4=0\\x_1+2x_2-x_3+3x_4=0\\-2x_1+15x_2-6x_3+13x_4=0\end{cases}$

23．求方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-5x_4=1\\-5x_1-10x_2-2x_3+x_4=-21\\x_1+4x_2+3x_3+2x_4=1\\2x_1-4x_2+9x_3-3x_4=-16\end{cases}$ 的通解.

24．在平面内，制作一个三角形沿一个正方形滑动一周的动画，要求滑动过程中三角形位于正方形之外.

兴趣阅读——数学家韦达简介

韦达 · F（Viete Franciscus）1540 年生于法国普瓦图地区[Poitou，今旺代省的丰特奈-勒孔特（Fontenay-le-Comte）]，1603 年 12 月 13 日卒于巴黎.

韦达是法国 16 世纪最有影响的数学家. 他的成就主要有：平面三角学与球面三角学，《应用于三角形的数学定律》是韦达最早的数学专著之一，也是早期系统论述平面和球面三角学的著作之一. 韦达还专门写了一篇论文“截角术”，初步讨论了正弦、余弦、正切弦的一般公式，首次把代数变换应用到三角学中. 他考虑含有倍角的方程，具体给出了将 cos(nx)表示成 cos(x)的函数，并给出了当 n 等于任意正整数时的倍角表达式.

（1）符号代数与方程理论.《分析方法入门》是韦达最重要的代数著作，也是最早的符号代数专著，书中第 1 章将两种希腊文献：帕波斯的《数学文集》第 7 篇和丢番图著作中的解题步骤结合起来，认为代数是一种由已知结果求条件的逻辑分析技巧，并自信希腊数学家已经应用了这种分析术，他只不过将这种分析方法重新组织. 韦达不满足于丢番图对每一问题都用特殊解法的思想，试图创立一般的符号代数. 他引入字母来表示量，用辅音字母 B、C、D 等表示已知量，用元音字母 A（后来用过 N）等表示未知量 x，而用 A quadratus、A cubus 表示 x_2、x_3，并将这种代数称为“类的运算”，以此区别于用来确定数目的“数的运算”. 当韦达提出类的运算与数的运算的区别时，就已规定了代数与算术的分界. 这样，代数就成为研究一般的类和方程的学问，这种革新被认为是数学史上的重要进步，它为代数学的发展开辟了道路，因此韦达被西方称为“代数学之父”. 1593 年，韦达又出版了另一部代数学专著——《分析五篇》（5 卷，约 1591 年完成）；《论方程的识别与订正》是韦达逝世后由他的朋友 A · 安德森在巴黎出版的，但早在 1591 年业已完成. 其中得到一系列有关方程变换的公式，给出了 G · 卡尔达诺三次方程和 L · 费拉里四次方程解法改进后的求解公式. 本书另一成就是记载了著名的韦达定理，即方程的根与系数的关系式. 韦达还探讨了代数方程数值解的问题，1591 年已有纲要，1600 年以《幂的数值解法》为题出版.

（2）几何学的贡献. 1593 年韦达在《分析五篇》中曾说明怎样用直尺和圆规作出导致某些二次方程的几何问题的解. 同年他的《几何补篇》在图尔出版了，其中给出尺规作图问题所涉及的一些代数方程知识. 此外，韦达最早明确给出有关圆周率 π 值的无穷运算式，而且创造了一套 10 进分数表示法，促进了记数法的改革. 之后，韦达用代数方法解决几何问题的思想由笛卡儿继承，发展成为解析几何学.