第 1 章　函数、极限与连续

【学习目标】

- 理解集合与函数的概念及函数的几何特性.
- 理解数列极限与函数极限的相关概念，理解无穷小和无穷大的概念，会求函数的极限.
- 理解函数与间断的概念，了解连续函数的性质.

函数是微积分学研究的主要对象，极限是应用数学中的一个重要概念，也是研究微积分的重要工具．极限思想、极限方法贯穿于应用数学的始终，当大家学完应用数学之后，就会深切体会到极限概念是微积分的“灵魂”．连续是函数的一个重要性态．本章将在复习和补充函数概念的基础上，介绍极限的概念、运算，并用极限的方法讨论无穷小及函数的连续性，为微积分的学习奠定必要的基础.

1.1　函 数

应用数学以变量为研究对象，函数关系是变量之间的最基本的一种依赖关系．这里我们在回顾中学数学关于函数知识的基础上，进一步从全新的视角来对它进行描述并重新分类.

1.1.1　集合、区间与邻域

1．集合概念

集合是数学中的一个基本概念，我们先通过几个简单例子来说明这个概念．例如：一个教室里的所有课桌、代数方程 $x^2+3x+2=0$ 的所有根、实数的全体等等，分别组成一个集合．一般的，所谓**集合**（简称**集**）是指具有某种共同属性的事物的总体，或是一些确定对象的汇总，组成这个集合的事物或个体称为该集合的**元素**.

通常用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c\cdots\cdots$ 表示集合中的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记为 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记为 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$．一个集合，若它只含有有限个元素，称为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

集合的表示法一般有两种：一种是**列举法**，即将集合中的元素一一列举出来．例如：由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的集合 A，可表示成 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；另一种是**描述法**，即用一个命题（或一句话）来描述集合中所有元素的属性，若集

合 M 是由具有某种性质 p 的元素 x 的全体所组成，则该集合可表示成 $M=\{x\,|\,x具有性质p\}$．例如，集合 B 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的解集，就可表示成 $B=\{x\,|\,x^2-4x+3=0\}$．

习惯上，**N** 表示所有自然数构成的集合, 称为自然数集．即

$$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体正整数的集合为：$\mathbf{N}^+=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$；

全体整数的集合记作 **Z**，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

全体有理数构成的集合称为有理数集，记作 **Q**，即

$$\mathbf{Q}=\{\frac{p}{q}\,|\,p\in Z,q\in\mathbf{N}^+且p与q互质\}$$

全体实数构成的集合记作 **R**，$\mathbf{R}^*$ 为排除 0 的实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数．

若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）．如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$．若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$．例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varPhi$．规定空集是任何集合的子集．

2. 集合的运算

集合的基本运算有 3 种：并、交、差．

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\bigcup B$，即

$$A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A 或 x\in B\}.$$

设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\bigcap B$，即

$$A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A 且 x\in B\}.$$

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A 且 x\notin B\}.$$

如果我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集．此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**．称 $I\setminus A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 $C_I A$．

集合运算的法则：

设 A、B、C 为任意三个集合，则

（1）交换律　$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$；

（2）结合律　$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$；

（3）分配律　$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$，$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$；

（4）对偶律 $C_I(A\cup B)=C_IA\cap C_IB$，$C_I(A\cap B)=C_IA\cup C_IB$.

3. 区间和邻域

区间是普遍使用的一类实数集合，可分为有限区间和无限区间.

（1）有限区间：设 $a<b$，称数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 $(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$$

类似地有，$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，$[a,\ b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**.

其中 a 和 b 称为区间 $(a,\ b)$、$[a,\ b]$、$[a,\ b)$、$(a,\ b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度. 闭区间 $[a,\ b]$ 和开区间 $(a,\ b)$ 在数轴上表示出来，分别如图 1-1（a）与（b）所示.

（2）无限区间：$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，$(-\infty,\ b)=\{x\,|\,x<b\}$ 等.

这两个无限区间在数轴上的表示分别如图 1-1（c）与（d）所示.

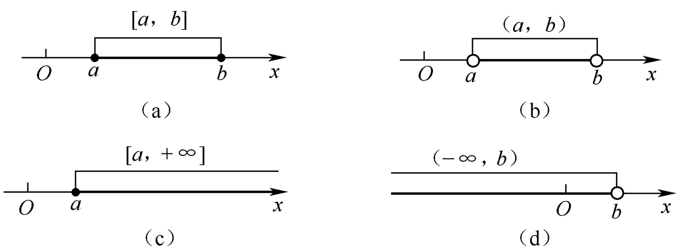


图 1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,\ +\infty)$，也是无限区间. 以后不需辨明是有限区间还是无限区间时，我们就简单地称为“区间”，且常用 I 表示.

下面引入在应用数学中常用的邻域概念.

以点 x_0 为中心的任何一个小开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$.

一般地设 δ 是一正数，则称开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)=\{x\,||\,x-x_0\,|<\delta\}$$

其中点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0，所得集合记作 $U^0(x_0,\delta)$，称为**点 x_0 的 δ 去心邻域**. 即

$$U^0(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|\,x-x_0\,|<\delta\}$$

例如，$U(1,0.5)=\{x\,||\,x-1|<0.5\}$ 表示点 1 的 0.5 邻域，即是开区间 $(0.5,\ 1.5)$. $U^0(1,0.5)=\{x\,|\,0<|\,x-1|<0.5\}$ 表示点 1 的 0.5 去心邻域，它可用两个开区间的并表示为 $(0.5,\ 1)\cup(1,\ 1.5)$.

1.1.2　函数的概念

1. 常量和变量

在观察某一现象的过程中，我们经常会遇到各种不同的量．例如：身高、体重、商品价格、学生人数、气温、产量等．这些量可以分为两种：一类在考察过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**．例如，圆周率π是个永远不变的量，某种商品的价格，某班学生的人数在一段时间内保持不变，这些量都是常量；另一类量在考察过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们则把其称之为**变量**．例如，一天中的气温，生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量．

习惯上，常量用字母 a, b, c, d 等表示，变量用字母 x, y, z 等表示．

变量所能取的数值的集合叫做这个变量的**变动区域**，如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变动区域．

在理解常量与变量时，应注意：

（1）在变化过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们也把它看作常量．例如，人的身高在一天中也不完全相同，但其变化微小，我们认为某人的身高就是常量．

（2）常量和变量依赖于所研究的过程．同一个量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量；反过来也一样．例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量．

2. 函数的概念

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化．如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们就说这些变量之间存在着函数关系．例如，某种商品的价格为 10 元，每天的销量用 x 表示，那么每天该商品的收入 y 与销量 x 之间的关系为：$y=10x$．当销量 x 取一个值时，收入 y 都有确定的值和它对应，我们就说收入 y 是销量 x 的函数．下面给出函数的精确定义：

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$．

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**．f 是函数符号，它表示 y 与 x 间的对应法则．有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y=g(x)$ 或 $y=F(x)$ 等．

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，也可记作 D_f，对应的函数值 y 的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**，记作 R_f．

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有唯一确定的值和它对应，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**．例如，设变量 x 和 y 之间的对应

法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出．显然，对每个 $x\in[-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值．所以该方程确定了一个多值函数．

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域．由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称**两个函数相等**．

例 1.1 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 的定义域．

解 要使 $f(x)$ 有意义，必须 $x^2-4\neq 0$，即 $x\neq\pm 2$．

所以函数的定义域为 $D=(-\infty,\ -2)\cup(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

例 1.2 求函数 $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域与值域．

解 要使 $g(x)$ 有意义，必须 $1-x^2\geqslant 0$，所以该函数的定义域为 $D=[-1,\ 1]$，由 $0\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，所以函数 $g(x)$ 的值域为 $R_g=[0,\ 1]$．

在求函数定义域时应注意：若单纯地讨论用算式表达的函数时，可以规定函数的自然定义域，即使算式有意义的一切实数组成的数集，以上两例所求定义域就是自然定义域．

在实际问题中，函数的定义域根据实际意义确定．

3．函数的表示法

常用的函数表示法主要有 3 种：表格法、图形法和解析法（公式法）．其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集 G

$$G=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\quad x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图形（也叫图像）．图形 G 在 x 轴上的垂直投影点集就是定义域 D_f，在 y 轴上的垂直投影点集就是值域 R_f，如图 1-2 所示．

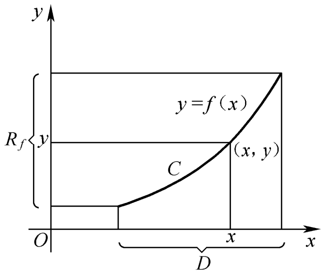


图 1-2

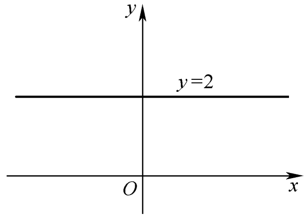


图 1-3

下面举几个函数的例子：

例 1.3 **常量函数** $y=2$ 的定义域是 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为单点集 $\{2\}$．其图形为与 x 轴平行的一条直线，如图 1-3 所示．

例 1.4　函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

称为**绝对值函数**．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，图形如图 1-4 所示．

例 1.5　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

称为**符号函数**．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-5 所示．

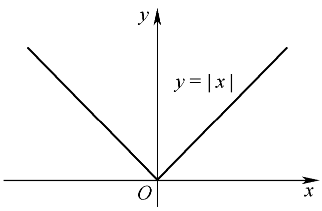


图 1-4

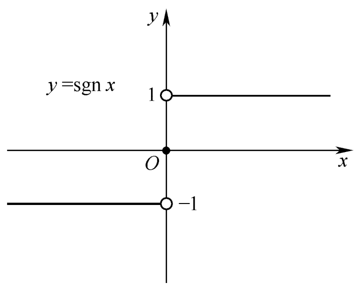


图 1-5

1.1.3　函数的几种特性

1．函数的有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 K，使对任一 $x\in I$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant K$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**有界**．如果这样的 K 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 内**无界**．

换句话说，函数 $f(x)$ 无界，就是对任意给定的正数 K，总存在 $x_0\in I$，使 $|f(x_0)|>K$．

例 1.6　（1）$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为 $|\sin x|\leqslant 1$．

（2）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间(0,1)内是无界的．因为，对于任意取定的正数 K $(K>1)$，总有 $x_1\in(0,1)$（如取 $x_1=\dfrac{1}{2K}$），使 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}=2K>K$，所以函数无界．

2．函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；反之，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的．如图 1-6 所示．单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

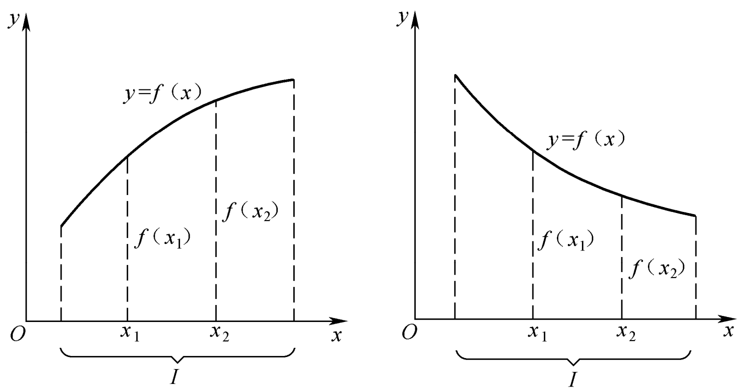


图 1-6

如函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的.

3．函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**； 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-7 所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1-8 所示.

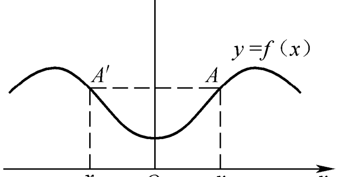


图 1-7

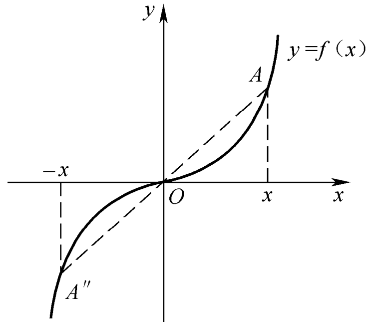


图 1-8

例如：$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数．

例 1.7 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^4-x^2$；（2）$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$．

解 （1）函数定义域为$(-\infty, +\infty)$，关于原点对称，且有 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)=x^4-x^2$ 为偶函数；

（2）函数定义域为$(-\infty, +\infty)$，关于原点对称，且 $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ 为奇函数．

4. *函数的周期性*

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且总有 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**．通常我们说的周期指的是函数的最小正周期．

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 l 的区间上，函数的图形有相同的形状，如图 1-9 所示．

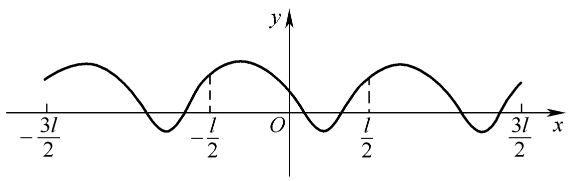


图 1-9

1.1.4 反函数与复合函数

1. *反函数*

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f．如果对任意一个 $y\in R_f$，D 内都有唯一确定的 x 与 y 对应，且此 x 满足 $f(y)=x$，这时把 y 看作自变量，x 视为因变量，就得到一个新的函数，称为原函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上写作 $y=f^{-1}(x)$．

注意：*原函数的定义域是其反函数的值域，原函数的值域是其反函数的定义域．*

例如，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时，函数 $y=\sin x$，值域为$[-1, 1]$，与其对应的反函数为 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1, 1]$，值域为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$．

把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的．如图 1-10 所示．

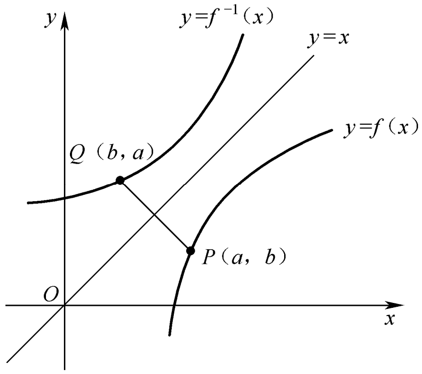


图 1-10

2. 复合函数

在同一现象中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量间接联系起来的．例如，在商品销售中，假定商品价格保持不变，营业额 y 是销量 x 的函数，而销量 x 又是时间 t 的函数，时间 t 通过销量 x 间接影响着营业额 y，所以营业额 y 也可以看成是时间 t 的函数，这种函数关系就是一种复合函数关系．

定义 1.7 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且值域 $R_g\subseteq D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$ 经函数 $u=g(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f\circ g(x)$，定义域为 D，变量 u 称为**中间变量**．

关于复合函数做两点说明：

（1）复合函数不只是有一个中间变量，也可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的．

例如：$y=\sqrt{u}$，$u=\lg v$，$v=1+x^2$，则 $y=\sqrt{\lg(1+x^2)}$ 是 x 的复合函数，中间变量为 u 和 v，这就是说复合函数也可以由两个以上函数经过复合而成．

（2）要注意不是任何两个函数都可复合成一个函数的．

例如：$y=\arcsin u$，$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数．因为 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$u\geqslant 2$ 全部落在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 之外，使 $y=\arcsin(2+x^2)$ 没有意义．

例 1.8 求复合函数 $y=\sqrt{\ln(x-1)}$ 的定义域．

解 该函数由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=x-1$ 复合而成，要使函数有意义，则需 $u\geqslant 0$，即 $\ln(x-1)\geqslant 0$，亦即 $x-1\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant 2$，所以该函数的定义域为 $[2,+\infty)$．

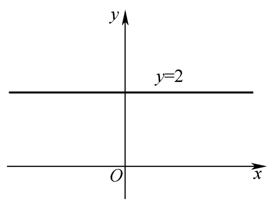
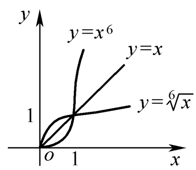
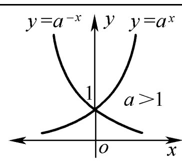
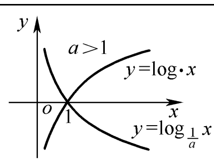
1.1.5　初等函数

在自然科学和工程技术中，经常遇到的函数都是初等函数，这些函数也是本课程研究的主要对象．初等函数是由基本初等函数所构成，下面先介绍基本初等函数，这些大家在中学已比较熟悉．

1．基本初等函数

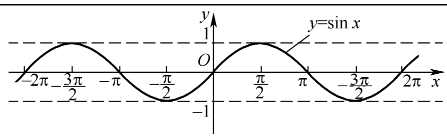
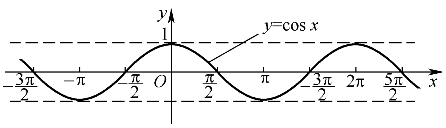
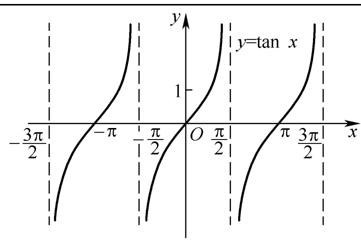
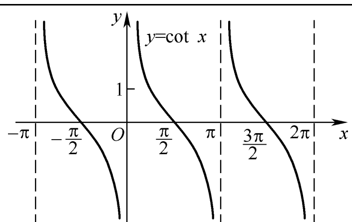
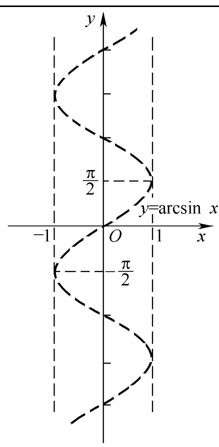
我们最常用的有 6 种基本初等函数，分别是：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数．下面我们用表格来把它们的图形与性质简单总结一下：

表 1-1　基本初等函数的图像与性质

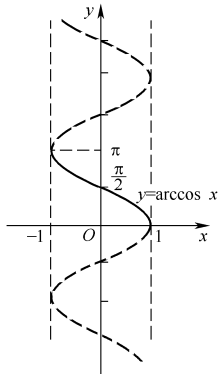
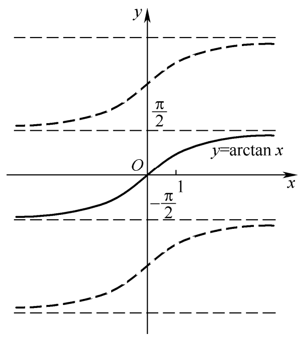
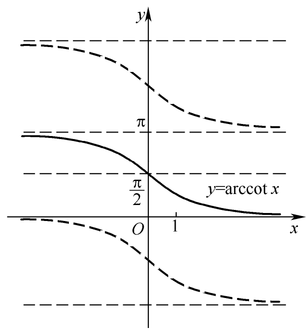
函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
常量函数	$y=c$ （c 为常数）	 （这里设 $c=2$ ）	1）定义域为全体实数； 2)值域为一点集，$R_f=\{c\}$； 3）与 x 轴平行的一条直线
幂函数	$y=x^a$ （a 为任意实数）	 （这里只画出部分函数图形的一部分）	令 $a=\dfrac{m}{n}$ 1）当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数； 2)当 m , n 都是奇数时，y 是奇函数； 3）当 m 为奇数 n 为偶数时，y 在 $(-\infty,0)$ 无意义.
指数函数	$y=a^x$ （$a>0$, $a\neq1$ ）	 （这里设 $a>1$ ）	1）其图形总位于 x 轴上方，并恒过 $(0,1)$ 点； 2）当 $a>1$ 时，在定义域内单调递增；当 $0<a<1$ 时，单调递减.
对数函数	$y=\log_a x$ （$a>0$, $a\neq1$ ）	 （这里设 $a>1$ ）	1)其图形总位于 y 轴右侧，并恒过 $(1,0)$ 点； 2）当 $a>1$ 时，在定义域内单调递增；当 $0<a<1$ 时，单调递减.

另外两类基本初等函数是三角函数和反三角函数．三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数等，反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数等，下面把它们的图像与性质总结如下：

表 1-2　基本初等函数的图像与性质

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
正弦函数	$y=\sin x$		1）正弦函数是以 2π 为周期的周期函数； 2）正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$．
余弦函数	$y=\cos x$		1）余弦函数是以 2π 为周期的周期函数； 2）余弦函数是偶函数且 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$．
正切函数	$y=\tan x$		1）正切函数是以 π 为周期的周期函数； 2）正切函数是奇函数； 3）在区间 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ 内，单调递增．
余切函数	$y=\cot x$		1）余切函数是以 π 为周期的周期函数； 2）余切函数是奇函数； 3）在区间 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内，单调递减．
反正弦函数	$y=\arcsin x$		1）由于此函数为多值函数，把函数值限制在主值区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上，避免了多值性（下同）； 2）定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，图像为实线部分，是单调增加的奇函数．

续表

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
反余弦函数	$y=\arccos x$		1）定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$； 2）在闭区间 $[-1, 1]$ 上是单调减少的，图像为实线部分．
反正切函数	$y=\arctan x$		1）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$； 2）在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数是单调增加的奇函数，图像为实线部分．
反余切函数	$y=\operatorname{arc}\cot x$		1）定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0, \pi)$； 2）在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数是单调减少的，图像为实线部分．

2．初等函数

所谓初等函数是指由 6 类基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的能用一个式子表示的函数．如：$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\sqrt{e^{x^2}+\sin^2\frac{1}{x}}$ 都是初等函数．而在研究微积分的运算时，常需要把一个初等函数分解成一些基本初等函数（或者它们的和、差、积、商）来考虑．如上例 $y=\sqrt{e^{x^2}+\sin^2\frac{1}{x}}$，则可分解为

$$y=u^{\frac{1}{2}},\quad u=\mathrm{e}^{v}+w^{2},\quad v=x^{2},\quad w=\sin t,\quad t=x^{-1}$$

不能用一个式子表示的分段函数为**非初等函数**，如符号函数：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases};$$

但是，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 虽为分段函数，却能用一个式子 $y=\sqrt{x^{2}}$ 来表示，因而 $y=|x|$ 仍为初等函数.

练习题 1.1

1．填空题

（1）设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^{2}}\,(x>0)$，则 $f(x)=$__________.

（2）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-2)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域是__________.

（3）函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域是__________.

（4）函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^{2}-9}}{x-3}$ 的定义域为__________.

（5）设 $f(x)=\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{2}$，则函数的图形关于__________对称.

2．选择题

（1）下列各对函数中，（　　）是相同的.

A．$f(x)=\sqrt{x^{2}},\quad g(x)=x$　　B．$f(x)=\ln x^{2},\quad g(x)=2\ln x$

C．$f(x)=\ln x^{3},\quad g(x)=3\ln x$　　D．$f(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x+1},\quad g(x)=x-1$

（2）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则函数 $f(x)-f(-x)$ 的图形关于（　　）对称.

A．$y=x$　　B．x 轴　　C．y 轴　　D．坐标原点

（3）设函数 $f(x)$ 的定义域是全体实数，则函数 $f(x)\cdot f(-x)$ 是（　　）.

A．单调减函数　　B．有界函数

C．偶函数　　D．周期函数

（4）函数 $f(x)=x\dfrac{a^{x}-1}{a^{x}+1}(a>0,a\neq 1)$（　　）.

A．是奇函数　　B．是偶函数

C．既奇函数又是偶函数　　D．是非奇非偶函数

（5）若函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$（　　）.

A． x^2　　B． x^2-2

C． $(x-1)^2$　　D． x^2-1

3．计算题

（1）求下列函数的定义域：

1） $y=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(x+1)}$；　　2） $y=\sqrt{2-3x^2}$；

3） $y=\arcsin(x+1)$.

（2）已知 $f(x+1)=x^2+2x-5$，求 $f(x)$， $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$， $f(2)$.

（3）判断下列函数的奇偶性：

1） $y=3x^3-5\sin x$；　　2） $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$　$x\in(-1,\ 1)$；

3） $y=|x|$.

（4）讨论函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 单调性和有界性.

（5）求下列函数的反函数：

1） $y=2x^2, x\in(0,+\infty)$；　　2） $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；

3） $y=1+\ln(x-2)$.

（6）指出下列哪些函数为初等函数：

1） $y=\lg(\sin^2 x+1)$；　　2） $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$；

3） $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$.

1.2　极限

变量之间的函数关系说明了因变量随自变量变化的规律．在研究函数关系时，常常需要考察自变量在某一无限变化的过程中，相应的因变量的变化趋势，这就是函数的极限问题，作为函数极限的特殊情形，我们首先研究一下数列的极限.

1.2.1　数列的极限

1．数列的定义

定义 1.8　在某一对应规则下，当 $n\ (n\to\infty)$ 依次取 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 时，对应的实数排成一列数 $x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$，这列数就称为**数列**，记为 $\{x_n\}$. 其中 x_n 称为该数

列的**通项**或**一般项**.

数列也可理解为定义在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数 $x_n = f(n)$，$n \in \mathbf{N}^+$.

例如数列：

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，　　一般项 $x_n = \frac{1}{n}$ ；

$-1, 2, -3, 4, \cdots, (-1)^n n, \cdots$　　一般项 $x_n = (-1)^n n$ ；

$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$　　一般项 $x_n = (-1)^{n+1}$.

2. 数列的极限

下面先举一个中国古代有关数列的例子.

引例 1.1　战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”说一根长为一尺的木棒，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

把每天截后剩下部分的长度记录如下（单位为尺）：

第一天剩下 $\frac{1}{2}$ ；第二天剩下 $\frac{1}{2^2}$ ；第三天剩下 $\frac{1}{2^3}$ ；…；第 n 天剩下 $\frac{1}{2^n}$ ；…. 这样就得到一个数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots, \qquad 一般项\ x_n = \frac{1}{2^n};$$

虽然一尺的木棒永远取不完，但不难看到，若干天后，也几乎没有了，因为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项随着 n 的无限增大而无限地接近于 0．这个例子反映了一类数列的某种特性，下面我们再考察一下前面给出的几个数列，随着 n 的逐渐增大，它们各自的变化趋势.

数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 n 无限增大时，一般项 $x_n = \frac{1}{n}$ 无限接近于 0；

数列 $\{(-1)^n n\}$ ，当 n 无限增大时，$x_n = (-1)^n n$ 绝对值也无限增大，所以 $x_n = (-1)^n n$ 不接近于任何确定的常数；

数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ ，当 n 无限增大时，当 n 为奇数时，$x_n = (-1)^{n+1} = 1$ ；当 n 为偶数时，$x_n = (-1)^{n+1} = -1$ ，即 x_n 不接近于任何确定的常数.

通过上述讨论可以看到，数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势有两种情形：无限接近于某个确定常数或不接近于任何确定的常数．由此可得数列极限的描述性定义如下：

定义 1.9　如果数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时，一般项 x_n 无限接近于某个确定的常数 a，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，此时也称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$.

由前面考察的数列可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 或 $\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0\text{ 或 }\frac{1}{2^n}\to 0(n\to\infty).$$

定义中“当 n 无限增大时，一般项 x_n 无限接近于 a”的意思是：当 n 充分大时，x_n 与 a 可以任意靠近，要多近就能有多近，也就是说 $|x_n-a|$ 可以小于任意给的正数，只要 n 充分地大.

当项数 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 不接近于任何确定的常数，则称数列 $\{x_n\}$ 没有极限或称数列 $\{x_n\}$ **发散**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例 1.9 考察下列数列的极限：

（1）$\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$；（2）$\left\{\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right\}$；（3）$\left\{\dfrac{2n^2+1}{n}\right\}$.

解 （1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2}=2$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n}$ 不存在.

3．数列极限的性质

根据数列极限的定义显然有:

定理 1.1（数列收敛的必要条件）若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 x_n 必有界.

数列有界是数列收敛的必要条件，而不是充分条件．例如，数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 是有界的，但它却是发散的.

1.2.2 函数的极限

函数极限问题与自变量的变化过程密切相关，如果在自变量的某一变化过程中，对应的函数值无限接近于某个确定的数，那么这个确定的数就称为函数在该变化过程中的**极限**．在这里我们主要讨论以下两种自变量的变化过程：

1．自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，即 $x\to\infty$ 时，函数值 $f(x)$ 的变化情形；

2．自变量 x 接近于有限值 x_0，即 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 的变化情形.

下面我们依次考察这两大类情况.

1． $x\to\infty$ 时的情形

记号 $x\to\infty$ 表示 x 取任意实数且 $|x|$ 无限增大．若 x 取正数且无限变大，记作 $x\to+\infty$，当 x 仅取负数，且 $|x|$ 无限变大，记作 $x\to-\infty$.

定义 1.10 设函数 $f(x)$ 在 $x>X(X>0)$ 时有定义，当 x 无限增大（记作 $x\to+\infty$）时，对应的函数值无限接近于确定的常数 A，则称 $\boldsymbol{A}$ **是函数** $f(x)$ **当** $x\to+\infty$ **时的极限**．记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

类似地可以定义函数极限

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

当且仅当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 同时成立时，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

从几何上说，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是：作直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$，则总有一个正数 X 存在，使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间，如图 1-11 所示.

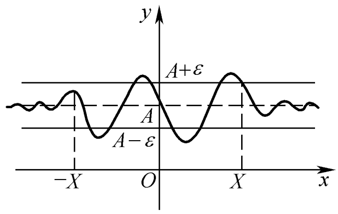


图 1-11

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，则直线 $y=A$ 称为函数 $y=f(x)$ 图形的水平渐近线.

例 1.10 论函数 $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 因为函数 $y=\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{x+2-3}{x+2}=1-\dfrac{3}{x+2}$，当 $x\to\infty$ 时，式子 $\dfrac{3}{x+2}$ 与 0 无限接近，所以函数值 y 与常数 1 无限接近，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$.

例 1.11 讨论函数 $y=\sin x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 函数 $y=\sin x$ 是周期函数，其函数值随着 x 的变化在 -1 与 1 之间周而复始的摆动，即当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\sin x$ 不会趋于一个确定的常数，所以函数 $y=\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时的极限不存在.

2. $x\to x_0$ 时的情形

在给出 $x\to x_0$ 时函数的极限之前，我们先考察引例 1.2.

引例 1.2 考察当 $x\to1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化情况.

解 因为 $x=1$ 时，$f(x)$ 没有定义，而当 $x\neq1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，故 $f(x)$ 的图形如图 1-12 所示.

不难看出，当 $x\to1$（$x\neq1$）时，$f(x)$ 与 2 的差值越来越接近于 0，还可看到 x 无论怎么趋向于 1 时，$|f(x)-2|$ 都越来越小，也就是说当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 以 2 为极限.

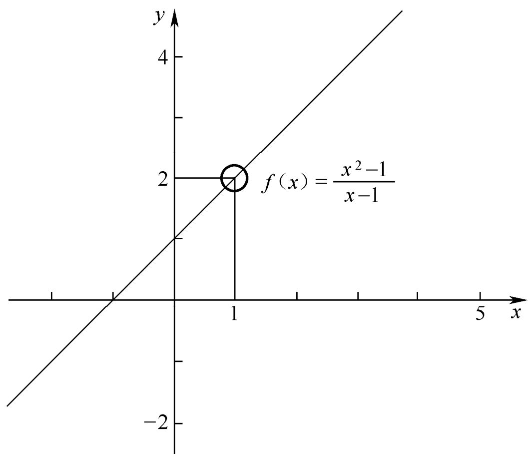


图 1-12

注：从上述例子可以看出，研究 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，是指 x 充分接近于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 的变化趋势，而不是求在 x_0 处的函数值．因此，研究 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限问题，与函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 这一点是否有定义无关．

下面给出 $x \to x_0$ 时函数极限的定义：

定义 1.11 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，A 为常数，如果在自变量 $x \to x_0$ 的变化过程中，函数值 $f(x)$ **无限接近于 A**，就称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时**极限**．记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (x \to x_0) .$$

注：记号 $x \to x_0$ 表示 x 取任意实数而趋于有限数 x_0．在这一变化过程中，x 可以从点 x_0 的左侧（$x < x_0$），也可以从 x_0 的右侧（$x > x_0$），还可以同时从点 x_0 的左右两侧趋近于 x_0，但 $x \neq x_0$，即 $x \in U^0(x_0)$．设 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有意义，若 x 只是从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，记作 $x \to x_0^-$，若 x 只是从右侧趋近于 x_0 时，记作 $x \to x_0^+$．若 x 仅从 x_0 的一侧，比如说左（右）侧趋近于 x_0 时，函数的极限存在，则称该极限为函数在点 x_0 处的左（右）极限，左极限和右极限统称为**单侧极限**，分别记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ 或 } f(x_0 - 0)\text{；} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ 或 } f(x_0 + 0) .$$

例 1.12 求极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$．

解 由上述函数图像可知，当 x 无限趋近于 1 的时候，函数值无限趋近于 2，所以

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 .$$

例 1.13 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} 3$.

解 函数 $f(x)=3$ 为常函数，无论 x 怎样变化，函数值都恒为 3，所以极限

$$\lim_{x\to 1} 3 = 3$$

由此，我们可得 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ ， $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

结论：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数，在其各自的定义域内每点处的极限都存在，且等于该点处的函数值.

3. 极限存在的判别法

定理 1.2 函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左、右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A .$$

若左右极限中有一个不存在，或者各自都存在，但不相等，则函数在该点的极限不存在.

例如：对于符号函数 $y=f(x)=\operatorname{sgn} x$ ， $f(0-0)=-1$ ， $f(0+0)=1$ ，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 1.14 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，证明：在 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 的极限不存在.

证明 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1$ ； $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$ ，即 $f(0-0)\neq f(0+0)$ ，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 1.15 设函数 $y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2\sqrt{x}) = 2$ ； $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2$ ，所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

4. 函数极限的性质

性质 1 （唯一性）如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ （或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ）存在，那么这一极限唯一.

性质 2 （局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，那么存在 x_0 的某一去心邻域，在此邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3 （局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，当 $A>0$（或 $A<0$ ）时，则存在 x_0 的某一去心邻域，在此邻域内函数 $f(x)>0$ （或 $f(x)<0$ ）.

注意：当 $f(x)>0$ （或 $f(x)<0$ ）时， A 可以为 0.

1.2.3 无穷小与无穷大

考虑自变量在某一变化过程中因变量 X 的两种特殊变化趋势：其一是$|X|$无限变小；其二是$|X|$无限变大．前者称为无穷小，后者称为无穷大．

1．无穷小量

在讨论变量的极限时，经常遇到以零为极限的变量．例如，数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$当$n\to\infty$时极限为 0；函数$\dfrac{1}{x}$当$x\to\infty$时，其极限也为 0．对于这些在自变量某一变化过程中以零为极限的变量给出如下定义：

定义 1.12 如果函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的**无穷小量**（简称**无穷小**）．

例如，因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数$\dfrac{1}{x}$为当$x\to\infty$时的无穷小；因为$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以函数$x-1$为当$x\to1$时的无穷小；因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以数列$\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$为当$n\to\infty$时的无穷小．

注：（1）无穷小与一个很小的确定常数（如10^{-24}）不能混为一谈．

（2）讨论无穷小时，要注意自变量的变化过程，$\lim\limits_{x\to2}(x-2)^2=0$，$(x-2)^2$是$x\to2$时的无穷小，而当 $x\to1$或$x\to0$时$(x-2)^2$不是无穷小．

（3）因为$f(x)\equiv0$，其绝对值可以任意小，在自变量任何一个变化过程中，极限总为零，所以零可以作为无穷小唯一的常数．即常数零在自变量任何一个变化过程中都是无穷小量，但无穷小量不是常数零．

无穷小与函数极限的关系：

定理 1.3 在自变量x的某一变化过程（$x\to x_0$或$x\to\infty$）中，函数$f(x)$具有极限A的充分必要条件是$f(x)=A+\alpha$，其中α是在自变量x的同一变化过程中的无穷小．

2．无穷小的代数性质

性质 1 有限个无穷小之和仍为无穷小量．

性质 2 有界变量与无穷小量的乘积仍为无穷小量．

推论 （1）常数与无穷小之积仍为无穷小；

（2）有限个无穷小之积仍为无穷小．

特别地有 若$f(x)\to0$，则$[f(x)]^n\to0$ （$n\in\mathbf{N}^+$）．

例 1.16 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$．

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0$（由性质 2 可得）.

3. 无穷大

与无穷小量相反，有一类函数在自变量的某一变化过程中绝对值可以无限增大．我们首先讨论一下函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时的变化趋势：

当 x 越来越接近于 1 时，$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ 越变越大，当 x 无限接近于 1 的过程中，$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ 可以任意变大，所谓“任意变大”是指它可以大过事先指定的任意大的正数.

定义 1.13 在自变量 x 的某一变化过程（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为在此变化过程中的**无穷大量**（简称**无穷大**）．记作 $\lim f(x)=\infty$，其中“$\lim$”是简记符号，是前述极限过程.

注意：这里 $\lim f(x)=\infty$ 只是沿用了极限符号，并不意味着变量 $f(x)$ 的极限存在；

无穷大 ∞ 不是数，不可与绝对值很大的常数（如 10^{16} 等）混为一谈；无穷大是指绝对值可以任意变大的一个变量.

例 1.17 下列变量中，哪个是无穷大，哪个是无穷小，为什么？

（1）$\tan x\left(x\to\dfrac{\pi}{2}\right)$；（2）$\dfrac{\sin x}{1+\cos x}(x\to 0)$；（3）$\ln x(x\to 0^+)$；（4）$2^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$.

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，所以 $\tan x$ 是 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时的无穷大；

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=0$，所以 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小；

（3）因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以 $\ln x$ 是 $x\to 0^+$ 时的无穷大（正无穷大）；

（4）因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，所以 $2^{\frac{1}{x}}(x\to 0)$ 既不是无穷大，又不是无穷小.

4. 无穷小与无穷大的关系

对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,$ 函数 $f(x)=x$ 与 $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$：

当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x\to\infty$，$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}\to 0$；当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x\to 0$，$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}\to\infty$.

由此可得无穷小与无穷大之间的关系，即

定理 1.4 在自变量的某一变化过程中：

（1）若 $f(x)$ 为无穷大，则在同一变化过程中函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；

（2）若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则在同一变化过程中函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

练习题 1.2

1．选择题

（1）下列数列收敛的有（　　）.

A．$\{(-2)^n\}$　　B．$\{(-1)^n\}$

C．$\left\{\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)\right\}$　　D．$\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$

（2）数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列有界的（　　）.

A．充要条件　　B．充分条件

C．必要条件　　D．无关条件.

（3）函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义，是 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有极限的（　　）.

A．充要条件　　B．充分条件

C．必要条件　　D．无关条件

（4） $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在且相等是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极限的（　　）.

A．充要条件　　B．充分条件

C．必要条件　　D．无关条件

（5）函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

A．有定义且有极限　　B．无定义但有极限

C．有定义但无极限　　D．无定义且无极限

（6）下列函数在指定的变化过程中，（　　）是无穷小量.

A．$\dfrac{1}{\mathrm{e}^x},\ (x\to\infty)$　　B．$\dfrac{\sin x}{x},\ (x\to\infty)$

C．$\ln(1+x),\ (x\to 1)$　　D．$\dfrac{\sqrt{x+1-1}}{x},\ (x\to 0)$

2．计算下列极限：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$；　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2^n}{3^n}\right)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+4x-12}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to\infty}(x^6-2x+1)$.

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，利用函数极限存在的充要条件，判断极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

4．在下列各题中，指出哪些是无穷小？哪些是无穷大？

（1）$2^{-x}(x\to+\infty)$；　　（2）$\dfrac{x+1}{x^2-4}(x\to 2)$；

（3）$\dfrac{\sin x}{x}(x\to\infty)$；　　（4）$\ln|x|(x\to 0)$.

1.3　极限的运算

1.3.1　极限的运算法则

利用极限的定义只能计算一些简单函数的极限，运用极限的四则运算法则可以求一些较复杂函数的极限问题.

1．极限的四则运算法则

在下面的讨论中，记号“$\lim$”下方没有标明自变量的变化过程，实际上，下面的定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的.

定理 1.5　设在自变量某同一变化过程中 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

（3）当 $B\neq 0$ 时，有 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

其中定理中的（1）、（2）积与和、差的运算可以推广到有限个具有极限的函数的情形．根据极限的四则运算法则，说明了“求极限”与“四则运算”的可换性，使用这些运算法则求极限时，应注意，参与运算的函数应为有限个，且各自极限存在.

推论　若 $\lim f(x)=A$，C 为常数，$n\in\mathbf{N}^+$，则

（1）$\lim\left[Cf(x)\right]=C\lim f(x)=CA$；

（2）$\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n=A^n$.

例 1.18　求 $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)$.

解 $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)=\lim\limits_{x\to1}3x-\lim\limits_{x\to1}1=3\lim\limits_{x\to1}x-1=3\times1-1=2$.

例 1.19 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2}{x^2-x+1}$.

解 这里分母极限不为零，故

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2}{x^2-x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}2}{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}1}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to1}x)^2-2}{(\lim\limits_{x\to1}x)^2-1+1}=\frac{1-2}{1-1+1}=-1.$$

由以上两例和极限的四则运算法则可知：

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=P(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=R(x_0)\quad(Q(x_0)\neq0)$$

例 1.20 求 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)^2}{x^2-16}$.

解 当 $x\to4$ 时，分子和分母的极限均为零，于是分子和分母不能分别取极限．分子和分母中有公因子 $x-4$，由于 $x\neq4$，所以 $x-4\neq0$，可约去这个不为零的公因子，所以

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)^2}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x-4)}{\lim\limits_{x\to4}(x+4)}=\frac{0}{8}=0.$$

例 1.21 求 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解 因为分子、分母的极限都为 0，不能用商的极限运算法则求其极限，但将分子有理化得

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

例 1.22 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-3x^3}{1+x^2+4x^3}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3-x^2+2}$；（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2-3x+1}$.

解 （1）先用 x^3 同时除分子、分母，然后取极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x-3x^3}{1+x^2+4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+4}=-\frac{3}{4}.$$

这是因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n=0$，其中 $n=1,2,3,\cdots$.

一般情形，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=a\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=a\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)^n=0$，其中 a 为常数，n 为正整数.

（2）先用 x^3 除分子、分母，再求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3-x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0 .$$

（3）先求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^3+x^2-5}$，类似于第（2）小题，分子、分母同时除以 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0 .$$

由定理 1.4，得原极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^2-3x+1}=\infty$.

一般的，当 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，n，m 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当m=n\\ 0, & 当m<n\\ \infty, & 当m>n\end{cases}.$$

例 1.23 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 当 $x\to\infty$ 时，分子和分母的极限都不存在，因此关于商的极限运算法则不能应用. 若把 $\dfrac{\arctan x}{x}$ 视为 $\arctan x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 的乘积，由于 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小，而 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$ 是有界变量，由无穷小的性质得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\arctan x=0 .$$

2. 复合函数的极限法则

定理 1.6 设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 满足如下两个条件：

（1）$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$；

（2）当 $x\neq x_0$ 时，$\varphi(x)\neq a$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

定理 1.6 表明：若函数 $f(u)$ 与 $\varphi(x)$ 满足定理的条件，则可以作代换 $u=\varphi(x)$，把求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]$，简化为求 $\lim\limits_{u\to a} f(u)$，这里 $a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$．

定理 1.6 只给出了复合函数的自变量和中间变量一种变化过程中的极限．把 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$，而把 $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$，可得类似的法则.

例 1.24　求 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$．

解　函数 $\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ 复合而成．求本题极限时，先求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$，再求 $\lim\limits_{u\to\frac{1}{4}}\sqrt{u}=\dfrac{1}{2}$，于是 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\dfrac{1}{2}$．

1.3.2　极限存在准则与两个重要极限

利用极限运算法则，不难求有理函数及代数函数的极限，而对于一些超越函数如三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数等的极限还是知之不多，为了扩大初等函数求极限的范围，下面介绍判定极限存在的两个充分性准则，作为应用准则的典型例子，将给出两个重要极限.

1. 夹逼准则

定理 1.7　设在 x_0 的某一去心邻域内，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$．

特别的，若数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$．

例 1.25　证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（重要极限一）.

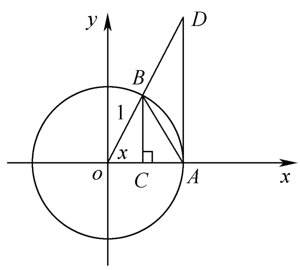


图 1-13

证明　在图 1-13 所示的单位圆中，圆心角 $\angle AOB=x$，注意到，$y=\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，不妨设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则有 $BC=\sin x$，$AD=\tan x$，$\overset{\frown}{AB}=x$，由 $S_{\Delta AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\Delta AOD}$ 得

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\Rightarrow\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$，根据定理 1.7 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

例 1.26 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

例 1.27 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ （令 $t=\dfrac{x}{2}$）.

例 1.28 求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}3x\cdot\sin\dfrac{1}{2x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$.

解 （1）利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 计算时，注意当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 中的 x 与分母中的 x 是相同的变量，求解时，令 $t=\dfrac{1}{2x}$，当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，因此

$$\lim_{x\to\infty}3x\cdot\sin\frac{1}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}2x\cdot\sin\frac{1}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\sin(x^2-4)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}=4$.

例 1.29 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$（有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小）

一般地，重要极限一可以推广为：

若 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$u(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$.

2. 单调有界收敛准则

在数列极限部分讲过，收敛的数列必定有界，但有界的数列却未必收敛，因此，有界是数列收敛的必要条件而非充分条件，而下面的准则说明了：若一个数列不仅有界，而且是单调的（单调递增或单调递减），则该数列必收敛.

定理 1.8 若单调数列 $\{x_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.

证明略．几何解释如下：

不妨设数列 $\{x_n\}$ 是单调递增的，从数轴上看 x_n 只能向一个方向移动，所以只有两种可能的趋势：（1）点 x_n 沿数轴无限增大而移向无穷远 $x_n \to \infty$；（2）点 x_n 无限趋近于某一定点 A，即 x_n 趋于一个极限．若假定 $|x_n| \leqslant M(M>0)$，则第一种情形就不可能发生，那么必有（2）发生，即 $\{x_n\}$ 趋于一个极限 A 且 $A \leqslant M$．

对于单调递减的数列，可作同样的解释．

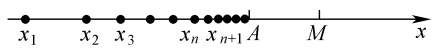


图 1-14

例 1.30 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$．

解 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，我们来证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加并且有界．按牛顿二项公式展开，有

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),
\end{aligned}
$$

类似的，

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+ \\
&\quad \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+ \\
&\quad \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

比较 x_n、x_{n+1} 的展开式，可以看到除前两项外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多了最后的一项，其值大于 0，因此

$$x_n < x_{n+1}$$

这就说明数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的，同时这个数列还是有界的．因为，如果 x_n 的展开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替，得

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

这就说明数列$\{x_n\}$是有界的．根据单调有界收敛准则，这个数列$\{x_n\}$的极限存在，且极限值为 e．即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

其中$\mathrm{e}=2.178\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$

可以证明，当x取实数而趋于$+\infty$或$-\infty$时，函数$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$的极限都存在，且都等于 e．

综上，有重要极限二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

利用$z=\frac{1}{x}$，则当$x\to\infty$时，$z\to 0$．于是有

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}\ \text{或}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\ .$$

例 1.31　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\mathrm{e}^{-1}$　（令$t=-x$）

例 1.32　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x-1+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^4\cdot\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^2\right\}$$

$$=\mathrm{e}^4\cdot 1=\mathrm{e}^4$$

例 1.33　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

一般地，重要极限二可以推广为：

若 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$u(x)\to 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}}=\mathrm{e}$.

1.3.3 无穷小的比较

前面已说明了两个无穷小的和、差、积仍为无穷小．然而，两个无穷小之商的情形比较复杂．如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0.$$

由此可见，在自变量同一变化过程中，两个无穷小的商的极限，有不同的结果，通常称这种极限为“$\frac{0}{0}$”**型未定式极限**．上述未定式极限各不相同，反应了作为分子和分母两个无穷小趋于零的“快慢”程度的不同．

比较两个无穷小在自变量同一变化过程中趋于零的“速度”是很有意义的，并能为处理未定式极限问题带来一些具体方法．

1．无穷小的比较

设 α 和 β 是在自变量同一变化过程中的无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$ 且 $\alpha\neq 0$，则在该变化过程中：

（1）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=\circ(\alpha)$，在 $\beta\neq 0$ 时，也说 α 是比 β 低阶的无穷小；

（2）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$ 就说 β 与 α 是同阶无穷小；

（3）如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$ 或 $\beta\sim\alpha$.

等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $C=1$ 的情形．

例如，（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，x^2 是比 $2x$ 高阶的无穷小，即 $x^2=\circ(2x)(x\to 0)$ 或说 $x\to 0$ 时，$2x$ 是比 x^2 低阶的无穷小；

（2）当 $x\to 1$ 时，$x^2-1\to 0$，$x^2-3x+2\to 0$，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=-2$，所以，当 $x\to 1$ 时，x^2-1 与 x^2-3x+2 是同阶无穷小；

（3）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$ 所以 $\sin x^2 \sim x^2 (x\to 0)$.

2. 等价无穷小的性质

定理 1.9 （等价无穷小的替换原理） 若在自变量同一变化过程中，$\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 都是无穷小，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，如果 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证明 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\tan nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$ （$n\neq 0$）.

但是下式的计算却是错误的，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，因为 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 不是等价无穷小.

事实上 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

即 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

也可以按下面方法计算出与分子等价的无穷小.

因为 $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$，而 $x\sim\tan x, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

上例表明：在使用定理 1.9 时必须用同分子、分母整体（或某个因子）等价的无穷小进行替换，而不是用各自非因子部分的等价无穷小进行替换.

下面给出几个常用的等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$a^x-1\sim x\ln a$；$(1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\neq 0)$.

例 1.34 验证当 $x\to 0$ 时，$x\sim\ln(1+x)$.

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$ （可根据定理 1.6 计算）

所以 $x\sim\ln(1+x)$（$x\to 0$）.

练习题 1.3

1．计算下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^3-x+1}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2-1}$；　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^n$；

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{10}(2x+3)^5}{12(x-2)^{15}}$；　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$．

2．利用重要极限一求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$；　（4）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x-a}$（$a$ 为常数）．

3．利用重要极限二求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$；　（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$．

4．利用等价无穷小的性质计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^3)}{(\sin x)^2}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$．

1.4　函数的连续性与间断点

1.4.1　函数的连续性

在自然界和日常生活中，有许多现象，其数量的变化具有一定的连续性特点．比如：气温随时间的变化；在自由落体运动中，物体通过的路程及运动速度随时间的变化等．通常情况下，我们把不突然或不显著的变化认为是连续变化，这些现象反映到数学中来，就是函数的连续性．这是与函数极限密切相关的另一基本概念．连续函数是微积分中研究的主要对象，微积分中许多问题的解决都将借助于函数的连续性．

1. 函数在一点处的连续性

所谓不突然改变，就是逐渐变化，也就是说，当自变量的改变量很微小时，函数的改变量也很微小；当自变量的改变量趋于 0 时，函数的改变量是无穷小.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量由 x_0 变到 x 时，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，若记 $\Delta x=x-x_0$，则称 Δx 为自变量在点 x_0 处的改变量（增量），而 $f(x)-f(x_0)$ 称为函数相应的改变量（增量），记作 Δy，即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

应该注意：这里的 Δx、Δy 分别表示自变量的增量和函数的增量，可能取正也可能取负.

根据上述分析，这就有了下面的定义：

定义 1.14 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量的改变量 $\Delta x\to 0$ 时，函数相应的改变量 $\Delta y\to 0$，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续**.

在定义中 $\Delta x\to 0$，表示 $x\to x_0$；$\Delta y\to 0$，表示 $f(x)\to f(x_0)$. 因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续也可以作如下定义：

定义 1.15 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在且等于它在点 x_0 处的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称**函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续**.

由定义 1.15 得出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的三要素：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

下面给出单侧连续的概念.

若 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,\ x_0]$ 上有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**左连续**；

若 $f(x)$ 在 $[x_0,\ x_0+\delta)$ 上有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处**右连续**.

显然函数在一点处连续的充要条件是函数在该点处左连续且右连续.

由定义不难验证：基本初等函数、多项式函数 $P(x)$ 及有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 在其定义区间内的任何点处都连续.

例 1.35 证明函数 $y=x^2$ 在点 x_0 处连续.

证明 当自变量 x 在 x_0 处的改变量为 Δx 时，函数 $y=x^2$ 对应的改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0{}^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=0$$

所以 $y=x^2$ 在点 x_0 连续.

例 1.36 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x, & x<0\\ 0, & x=0\\ 3-\cos x, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2+x)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3-\cos x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$．但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

2. 区间上的连续函数

（1）若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b)（包括 $a=-\infty$ 及 $b=+\infty$ 的情形）内的每一点都连续，则称**函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续**．或者说函数 $f(x)$ 是 (a,b) 内的**连续函数**，并称 (a,b) 为 $f(x)$ 的**连续开区间**.

（2）若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 右连续，在右端点 b 左连续，即

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

则称**函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续**，或者说函数 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**连续函数**，并称 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的**连续闭区间**．比如：有理函数是其定义域内的连续函数.

注意：连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 1.37 讨论函数 $y=\sin x$ 的连续性.

解 对任一 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}$

因为 $\left|\cos\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1$ 有界，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{\Delta x}{2}=0$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$．

因此 $y=\sin x$ 在点 x_0 处连续，由于 x_0 的任意性，故 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 内连续.

例 1.38 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x<2\\ 0, & x=2\end{cases}$$

的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f(0)$；

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0;$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)=1, \quad f(2)=0;$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 右连续，在 $x=1,\ x=2$ 处均不连续，即函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1)\cup(1,2)$ 内连续.

1.4.2　函数的间断点及其类型

1. 间断点的概念

定义 1.16　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，并称 x_0 为 $f(x)$ 的一个**间断点**.

由连续的定义可知：若函数 $f(x)$ 具备下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 点无定义，而在 x_0 的去心邻域有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）虽在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个间断点或不连续点.

2. 间断点的分类

根据间断点的情形，将间断点分为两类：

第一类间断点： $f(x_0-0),\ f(x_0+0)$ 都存在，而 x_0 为间断点.

第二类间断点： $f(x_0-0),\ f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在.

在第一类间断点中，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其间断的原因可能是函数在 x_0 处无定义或极限值不等于函数值导致的．此时，补充函数在 x_0 处定义或改变在 x_0 处的定义，可使函数在 x_0 处连续，称此类间断点为**可去间断点**；

若 $f(x_0-0),\ f(x_0+0)$ 都存在但不相等，即 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称 x_0 为**跳跃间断点**.

例如，$x=0$ 为 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点．若补充 $f(0)=1$，则补充后的函数在 $x=0$ 处连续.

再如，$f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点.

例 1.39　讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$ 的间断点类型.

解　$f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，其图形如图 1-15 所示.

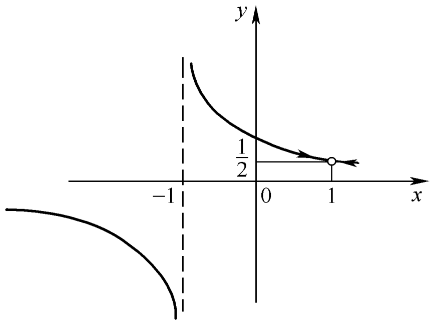


图 1-15

显然，$x=\pm1$ 时，$f(x)$ 无定义，故为间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$；

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

故 $x=-1$ 为**无穷间断点**（第二类间断点）；$x=1$ 为可去间断点.

例 1.40 设函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，试判断其间断点.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点（**振荡间断点**）.

1.4.3 初等函数的连续性

由函数的连续性定义可知，要求函数在连续点处的极限值，只要求出该点处的函数值即可．这为我们求连续函数在其定义域中某一点的极限提供了一种极其简单的方法．如果我们能够说明初等函数在其定义区间内的任一点处都连续（或者说初等函数是其定义区间内的连续函数），那么求初等函数定义区间内任一点处的极值，都可以通过求函数值来实现.

已知基本初等函数在其定义域内是连续函数，若能证明连续函数的和、差、积、商仍为连续函数，连续函数复合之后仍为连续函数，根据初等函数的构成，则可说明初等函数在其定义区间内是连续函数（下面关于连续函数的四则运算就说明了这个道理）.

1. 连续函数的四则运算

定理 1.10 两个连续函数的和、差、积、商（分母不为 0）也为连续函数.

证明 这里仅证明和的情形，其他情形可作为练习.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，考虑 $F(x)=f(x)+g(x)$，根据极限的运算准则有

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)=F(x_0).$$

利用归纳法，可将定理 1.10 推广到有限个函数的情形.

2. 反函数的连续性

定理 1.11 若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调增加（或减小）且连续，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在相应的区间上单调增加（或减小）且连续.（证明略）

例如，三角函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，则其反函数 $y=\arcsin x$ 在对应区间 $[-1,1]$ 上也是单调增加且连续.

同理可说明：反三角函数 $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\mathrm{arc}\cot x$ 在其定义域内都是连续的.

3. 复合函数的连续性

定理 1.12 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处连续.

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f[u]=f(u_0)$，又 $u_0=\varphi(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$，所以可将上式改写成 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$，这说明在求两个连续函数复合而成的复合函数的极限时，函数符号“f”与极限号“lim”可以交换次序，并且可以推广到多次复合的情形.

4. 初等函数的连续性

由前面的定理可得：**初等函数在其定义区间内总是连续的**. 因而求初等函数定义区间内任一点处的极限值，只需求出该点处的函数值即可.

例 1.41 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$.

解 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\ln 1=0$.

例 1.42 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(\sqrt{1+x^2}+1)}=0$

1.4.4　闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有一些重要的性质，这些性质是我们今后用于分析和论证某些问题的重要依据．下面我们不加证明的给出这些性质．

1．最值定理

定理 1.13（最值定理） 闭区间上的连续函数必有最大值和最小值．即若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则必存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，对于任意的 $x \in [a,b]$，恒有 $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$，其中 $f(x_1)$ 是最小值，$f(x_2)$ 是最大值．

定理 1.14（有界性定理） 闭区间上的连续函数一定在该区间上有界．即若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则对于任意的 $x \in [a,b]$，存在 m, M．使 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，其中，$M, m$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值．

2．介值定理

定理 1.15（介值定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，又 μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何值，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi) = \mu$．

由图 1-16 可见，介值定理的几何意义为：介于直线 $y = f(a)$ 与 $y = f(b)$ 之间的任一直线 $y = \mu$（μ 为常数）与连续曲线 $y = f(x)$ 至少交于一点．

推论 1　闭区间上的连续函数必取得最大值与最小值之间的任何值．

推论 2（零点定理） 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 则至少存在一点 $\xi \in (a,\ b)$，使 $f(\xi) = 0$（即 ξ 是 $f(x)$ 的零点或 ξ 是方程 $f(x)=0$ 的根）．

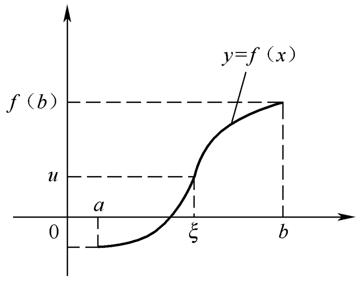


图 1-16

例 1.43　试证：方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一实根．

证明　设函数 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 内连续．又 $f(0) = 1 > 0$，$f(1) = -2 < 0$，由零点定理知，该方程在 $(0,1)$ 内至少有一实根．

练习题 1.4

1．选择题

（1）函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 的连续区间为（　　）.

A．$[-1,+\infty)$　　B．$[2,+\infty)$

C．$[-1,2)\cup(2,+\infty)$　　D．$[-1,2)$

（2）函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的连续区间为（　　）.

A．$[1,2]$　　B．$[0,2]$

C．$[0,1)\cup(1,2]$　　D．$[0,1)$

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　）.

A．1　　B．e

C．e^{-1}　　D．-1

（4）函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的（　　）.

A．必要条件　　B．充分条件

C．充要条件　　D．无关条件

（5）函数 $y=-\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2)$ 内的最小值是（　　）.

A．1　　B．$-\dfrac{1}{2}$

C．不存在　　D．-1

（6）方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内（　　）.

A．恰有一实根　　B．至少有一个实根

C．至少有两个实根　　D．无实根

2．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+4}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^5$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$；　　（4）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{-2\sec x}$.

3．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，　$f(b)>b$，试证明至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

习题一

1．填空题

（1）函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是__________．

（2）设 $f(x)=x^3+x^2+1$，则 $f[f(0)]=$__________．

（3）函数 $y=\ln(1+x^2)$ 的单调增加区间是__________．

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$__________．

（5）函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+2}$ 的连续区间是__________．

（6）若函数在 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ 2x+b, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $b=$__________．

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=$__________．

（8）函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点是 $x=$__________．

2．选择题

（1）邻域 $U^{\circ}(5,1)$ 用区间或数集表示为（　　）．

A．$I=\{x||x-5|<1\}$　　B．$I=\{x|0\leqslant|x-5|\leqslant 1\}$

C．$(4,5)\cup(5,6)$　　D．$(4,6)$

（2）下列各对函数相同的是（　　）．

A．$f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

B．$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}, g(x)=x-3$

C．$f(x)=\dfrac{\pi}{2}x, g(x)=x(\arcsin x+\arccos x)$

D．$f(x)=\ln x, g(x)=2\ln\sqrt{x}$

（3）下列各对函数能构成复合函数的是（　　）．

A．$y=u^2, u=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$

B．$y=\ln u, u=\cos x, x\in(-\infty,+\infty)$

C．$y=\lg u, u=\arcsin x, x\in[-1,1]$

D．$y=\sqrt{1-u^2}, u=\mathrm{e}^x, x\in[-\infty,+\infty]$

（4）下列函数中是偶函数的是（　　）.

A．$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　B．$y=x^3+1$

C．$y=x\sin(x+1)$　　D．$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+\cos n^2}{n}=$（　　）.

A．0　　B．1

C．2　　D．3

（6）当 $x\to\infty$ 时，下列变量是无穷小量的是（　　）.

A．$\dfrac{1}{x}\sin x$　　B．$x\ln(1+x)$

C．$\dfrac{e^x-1}{x}$　　D．$x\sin\dfrac{1}{x}$

（7）函数 $y=x^2-1$ 在区间 $[-1,2)$ 内的最大值是（　　）.

A．0　　B．3

C．-1　　D．不存在

（8）下列函数在指定的变化过程中，（　　）不是无穷小量.

A．$1-e^{\frac{1}{x}},\ (x\to\infty)$　　B．$\dfrac{\sin x}{x},\ (x\to\infty)$

C．$\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x},\ (x\to 0)$　　D．$\ln(1+x),\ (x\to 0)$

3．计算题

（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos^2x-1}{(x+\sin x)^2}$；

（3）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{1}{x}+1}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{10}-2)(3x+1)^{20}}{(2x+3)^{30}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$；　　（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^3\tan x}{1-\cos x^2}$.

4．讨论下列函数 $f(x)$ 的连续性，并写出其连续区间.

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2, & x>1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x<-1\end{cases}.$$

5．设函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0 \end{cases}$$

问：（1）a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处有极限存在？

（2）a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？