

第6章 积分的应用

在这一章中,我们将讨论积分学的一些应用.实际上,我们在前一章中已经提到,不定积分可用于在知道边际成本的情况下求出总成本,而定积分的几何意义则是曲边梯形的面积,这都是积分学的一些基本应用.然而在本章中,我们会看到积分的应用并非仅限于几何或是经济,在诸如资源消耗这样的问题也需要用到积分来求解.由于本章各节涉及不同的专业知识,读者可按专业需要选学本章的相关内容.另外,在每个例题中,除了常规的应用积分求解的过程,我们还附上 MATLAB 的运算结果,以供读者参考.

6.1 积分的几何应用

在积分的几何应用中,经常采用所谓的元素法.为了说明这种方法,我们先回顾一下在第五章中学习过的定积分的几何意义:

我们知道,对于 $f(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$), 定积分 $A = \int_a^b f(x)dx$ 表示的是底边为 x 轴, 长度为 $[a, b]$ 的曲边梯形的面积, 而积分上限函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 则表示的是底边为 x 轴, 长度为 $[a, x]$ 的曲边梯形的面积.

为方便下面的讨论,我们换一个记号,将积分上限函数表示为

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

我们对这个积分上限函数两边求微分,则微分

$$dA(x) = f(x)dx$$

表示点 x 处以 dx 为宽的小曲边梯形面积的近似值 $\Delta A \approx f(x)dx$, 我们把 $f(x)dx$ 称为曲边梯形的面积元素. 于是,我们也可以说,以 $[a, b]$ 为底的曲边梯形的面积 A 就是以面积元素 $f(x)dx$ 为被积表达式,以 $[a, b]$ 为积分区间的定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

一般情况下,为求某一量 U , 先将此量分布在某一区间 $[a, b]$ 上, 而分布在 $[a, x]$ 上的量用函数 $U(x)$ 表示, 再求这一量的元素 $dU(x)$, 设 $dU(x) = u(x)dx$, 然后以 $u(x)dx$ 为被积表达式, 以 $[a, b]$ 为积分区间求定积分即得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

用这一方法求量 U 的值的方法便称为元素法(或微元法). 这一方法不仅能求简单的曲边梯形面积,还可以求较复杂的平面图形的面积. 一般地, 设平面图形由上下两条曲线 $y = f_+(x)$ 与 $y = f_-(x)$ 及左右两条直线 $x = a$ 与 $x = b$ 所围成, 则面积元素为 $[f_+(x) - f_-(x)]dx$, 于是平

面图形的面积为

$$S = \int_a^b [f_{\text{上}}(x) - f_{\text{下}}(x)] dx \quad (1)$$

类似地，由左右两条曲线 $x = \varphi_{\text{左}}(y)$ 与 $x = \varphi_{\text{右}}(y)$ 及上下两条直线 $y = d$ 与 $y = c$ 所围成，则平面图形的面积为

$$S = \int_c^d [\varphi_{\text{右}}(y) - \varphi_{\text{左}}(y)] dy \quad (2)$$

例 1 求由 $y^2 = x$ 、 $y = x^2$ 所围成的图形的面积 A 。

解 先由方程组 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点： $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

再由元素法有

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

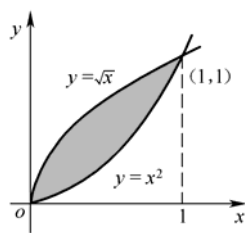


图 6-1

MATLAB 运算过程及结果：

```
>> syms x;
>> int(sqrt(x)-x^2,0,1)
ans =
1/3
>>
```

例 2 求由 $y^2 = 2x$ ， $y = x - 4$ 所围成的图形的面积 A 。

解 由于图形可看作由左边的曲线 $x = \frac{1}{2}y^2$ 和右边的曲线 $x = y + 4$ 所围成，因此可以考虑使用公式 (2) 进行求解。

先由方程组 $\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$ 得交点： $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$

再由元素法有

$$A = \int_{-2}^4 [(y+4) - \frac{1}{2}y^2] dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18$$

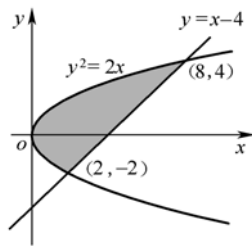


图 6-2

MATLAB 运算过程及结果：

```
>> syms y
>> int((y+4)-(1/2)*(y^2),y,-2,4)
ans =
18
>>
```

在此例中，也可以使用公式 (1) 进行求解，但计算过程却会较为繁琐。读者可以思考一下，使用公式 (1)，即以横坐标为积分变量，会有何不便？

元素法在几何上不仅仅可以用于求面积，还可以用于求旋转体的体积。所谓**旋转体**指的是由一个平面图形绕该平面内一条直线旋转一周而成的立体。常见的旋转体包括圆柱、圆锥、圆台、球体等。

我们取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$, 相应于 $[a, b]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积, 近似等于以 $f(x)$ 为底半径、 dx 为高的扁圆柱体的体积, 即体积元素为

$$dV = \pi [f(x)]^2 dx$$

以 $\pi [f(x)]^2 dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 即得所求旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

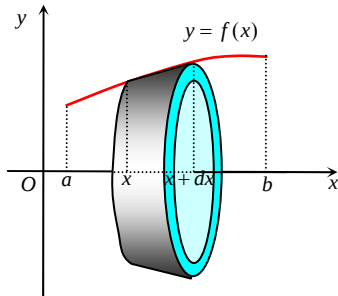


图 6-3

例 3 求曲线 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) 绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_0^1 \pi [f(x)]^2 dx = \int_0^1 \pi [\sqrt{x}]^2 dx \\ &= \int_0^1 \pi x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} (1 - 0) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x;
>> int(pi*x,0,1)
ans =
1/2*pi
>>
```

例 4 求曲线 $y = e^x$ ($-1 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积.

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_{-1}^2 \pi [f(x)]^2 dx = \int_{-1}^2 \pi [e^x]^2 dx \\ &= \int_{-1}^2 \pi e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^2 e^{2x} d(2x) \\ &= \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_{-1}^2 = \frac{\pi}{2} (e^4 - e^{-2}) \end{aligned}$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x;
>> int(pi*exp(2*x),-1,2)
ans =
1/2*pi*exp(4)-1/2*pi*exp(-2)
>>
```

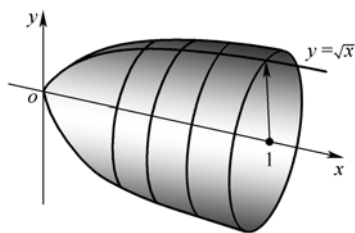


图 6-4

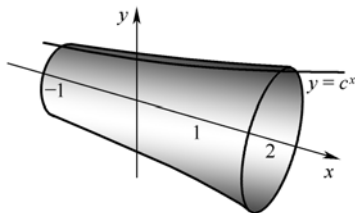


图 6-5

习题 6.1

1. 求由下列曲线所围图形的面积:

(1) $y = \sqrt{x}$, $y = x$

(2) $y = e^x$, $x = 0$, $y = e$

(3) $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = x$, $x = 2$

(4) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$

2. 求由下列各题中的曲线所围图形绕指定轴旋转的旋转体的体积:

(1) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$. 绕 x 轴

(2) $y = \sqrt{x}$, $y = x$. 绕 x 轴

6.2 积分的经济应用

我们在 5.1 中曾给出一个应用不定积分由边际成本求总成本的例子(例 4). 实际上由边际函数求原函数只是积分学在经济问题中的应用中的一个方面而已. 在这一节中, 我们将介绍更多的关于积分(尤其是定积分)在经济中的一些典型应用.

6.2.1 变化率与总量

我们知道导数是概括了各种各样的变化率概念而得出的一个更一般也更抽象的概念, 它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度. 在经济学中, 我们常常会遇到知道变化率求总量的问题, 这些问题在数学上看来无非是知道了导数而要去求原函数的问题, 因此使用积分进行求解便是很自然的事.

例 1 某工厂生产某商品在时刻 t 的总产量变化率为 $x'(t) = 100 + 12t$ (单位: 小时), 求由 $t = 2$ 到 $t = 4$ 这两小时的总产量.

解 由于知道了变化率, 因此关于时间 t 的总产量函数应为:

$$x(t) = \int x'(t) dt = \int (100 + 12t) dt = 100t + 6t^2 + C$$

于是由 $t = 2$ 到 $t = 4$ 这两小时的总产量为

$$x(4) - x(2) = 272$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x t;
>> int(100+12*t,t)
ans =
    100*t+6*t^2
>> x=inline('t.^2*6+t.*100','t') %利用在线函数命令自定义一个函数
x =
    Inline function:
    x(t) = t.^2*6+t.*100
>> x(4)-x(2)
ans =
    272
>>
```

像此类题目，利用定积分来求解往往更为方便，如上例，我们可以通过求区间 $[2, 4]$ 上的定积分来直接求出由 $t=2$ 到 $t=4$ 这两小时的总产量为：

$$\int_2^4 x'(t)dt = \int_2^4 (100 + 12t)dt = [100t + 6t^2]_2^4 = 272$$

MATLAB 运算过程及结果：

```
>> syms t;
>> int(100+12*t,t,2,4)
ans =
    272
>>
```

例 2 生产某产品的边际成本为 $C'(x) = 150 - 0.2x$ ，当产量由 200 增加到 300 时，需追加成本 C 为多少？

解 直接利用定积分可得追加成本

$$C = \int_{200}^{300} (150 - 0.2x)dx = [150x - 0.1x^2]_{200}^{300} = 10000$$

MATLAB 运算过程及结果：

```
>> syms x;
>> int(150-0.2*x,x,200,300)
ans =
    10000
```

例 3 某地区当消费者个人收入为 x 时，消费支出 $W(x)$ 的变化率为 $W'(x) = \frac{15}{\sqrt{x}}$ ，当个人收入由 900 增加到 1600 时，消费支出增加多少？

解 利用定积分可求得

$$W = \int_{900}^{1600} \frac{15}{\sqrt{x}} dx = [30\sqrt{x}]_{900}^{1600} = 300$$

MATLAB 运算过程及结果：

```
>> syms x;
>> int(15/sqrt(x),x,900,1600)
ans =
    300
>>
```

6.2.2 收益流的现值和将来值

我们知道, 若以连续复利率 r 计息, 现在将一笔款项 P 元钱存入银行, t 年后的价值 (将来值) 应为

$$B = Pe^{rt}$$

反之, 若 t 年后能获得 B 元钱, 则需要现在往银行里存入的金额 (现值) 应为

$$P = Be^{-rt}$$

下面我们来讨论收益流的现值和将来值.

若某公司的收益是连续获得的, 则其收益可被看作是一种随时间连续变化的收益流, 而收益流对时间的变化率则被称为收益流量. 收益流量实际上是一种速率, 一般用 $P(t)$ 表示, 收益流量的单位为: 元/年 (一般时间 t 以年为单位, 收益以元为单位, 且时间 t 从现在开始计算). 若 $P(t)=b$ 为常数, 则称该收益流具有常数收益流量.

和单笔款项一样, 收益流的将来值定义为将其存入银行并加上利息之后的总额. 而收益流的现值是这样一笔款项, 若将它存入银行, 将来从收益流中获得的总收益, 与包括利息在内的银行存款值有相同的价值. 在讨论连续收益流时, 为简单起见, 我们还是以连续复利率 r 计息.

若有一笔收益流的收益流量为 $P(t)$ (元/年), 考虑从现在开始 $t=0$ 到 T 年后这一时间段的将来值和现值. 我们在区间 $[0, T]$ 内任取一小区间 $[t, t+dt]$, 在 $[t, t+dt]$ 内将 $P(t)$ 近似看作常数, 则所应获得的金额近似等于 $P(t)dt$ (元), 从现在 ($t=0$) 算起, $P(t)dt$ 这一金额是在 t 年后的将来而获得, 因此在 $[t, t+dt]$ 内, 收益的现值约为

$$[P(t)dt]e^{-rt} = P(t)e^{-rt}dt$$

从而总现值为

$$\int_0^T P(t)e^{-rt}dt$$

在计算将来值时, 收入 $P(t)dt$ 将在以后的 $(T-t)$ 年期间内获息, 所以在 $[t, t+dt]$ 内, 收益流的将来值约为

$$[P(t)dt]e^{r(T-t)} = P(t)e^{r(T-t)}dt$$

从而将来值为

$$\int_0^T P(t)e^{r(T-t)}dt$$

例 4 假设以年连续复利 $r=0.1$ 计息, 求收益量为 100 元/年的收益流在 20 年期间的现值和将来值.

解 现值 $= \int_0^{20} 100e^{-0.1t}dt = 1000(1 - e^{-2}) \approx 864.66$ (元)

将来值 $= \int_0^{20} 100e^{0.1(20-t)}dt = \int_0^{20} 100e^2e^{-0.1t}dt = 1000e^2(1 - e^{-2}) \approx 6389.06$ (元)

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x
```

```
>> vpa(int(100*exp(0.1*(20-t)),t,0,20),6)      %用 vpa 函数将精度控制在 6 位
ans =
    6389.06
>>
```

例 5 设有一项计划现在($t = 0$)需要投入 1000 万元, 在 10 年中每年收益为 200 万元, 若连续利率为 5%, 求收益资本价值 W . (设购置的设备 10 年后完全失去价值)

解 由经济学知识知资本价值等于收益流的现值减去投入资金的现值, 因此

$$W = \int_0^{10} 200e^{-0.05t} dt - 1000 = \left[\frac{-200}{0.05} e^{-0.05t} \right]_0^{10} - 1000 \approx 573.88 \text{ 万元}$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x
>> w=vpa(int(200*exp(-0.05*t),t,0,10),6)-1000
w =
    573.88
>>
```

例 6 某企业一项为期 10 年的投资需购置成本 80 万元, 每年的收益流量为 10 万元, 求内部利率 u . (注: 内部利率是使收益价值等于成本的利率)

解 由收益流的现值等于成本, 得

$$80 = \int_0^{10} 10e^{-ut} dt = \left[-\frac{10}{u} e^{-ut} \right]_0^{10} = \frac{10}{u} (1 - e^{-10u})$$

于是可得到 u 的近似值 0.0464.

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms t u;
>> int(10*exp(-u*t),t,0,10)
ans =
-10*(exp(-10*u)-1)/u
>> solve(' -10*(exp(-10*u)-1)/u=80','u')      %解以 u 为未知数的方程
ans =
-1/8*exp(-lambertw(-5/4*exp(-5/4))-5/4)+1/8
>> vpa(-1/8*exp(-lambertw(-5/4*exp(-5/4))-5/4)+1/8,6)
ans =
    .464213e-1      %以科学计数法显示的结果
>> u=.464213e-1      %将结果还原为一般短格式
u =
    0.0464
>>
```

习题 6.2

1. 某地区居民购买冰箱的消费支出 $W(x)$ 的变化率是居民总收入 x 的函数,

$W'(x) = \frac{1}{200\sqrt{x}}$, 当居民收入由 4 亿元增加至 9 亿元时, 购买冰箱的消费支出增加多少?

2. 某公司按利率 10% (连续复利) 贷款 100 万元购买某设备, 该设备使用 10 年后报废, 公司每年可收入 b 万元.

- (1) b 为何值时, 公司不会亏本?
- (2) 当 $b = 20$ 万元时, 求内部利润 (应满足的方程);
- (3) 当 $b = 20$ 万元时, 求收益的资本价值.

6.3 积分的其他应用

我们在前面已经知道, 在连续复利率 r 下, 在当前时刻 $t=0$ 往银行存入 P_0 元, 则在将来的任意 t 时刻的总收益为 $P(t) = P_0 e^{rt}$ 元, 像这样的模型被称为**指数增长模型**. 不仅仅是连续复利的投资, 实际上很多诸如人口增长、细菌繁殖、资源的需求或消耗等问题也都可以用这个模型来描述.

例如假设 P_0 表示某种自然资源 (例如石油或煤) 在时间 $t=0$ 时所需的数量, 而且使用这种资源的增长率为 k , 因此, 采用指数增长模型在时间 t 所用的数量 $p(t)$ 由

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

给出. 于是在区间 $[0, T]$ 内所用的总量为

$$\int_0^T P(t) dt = \int_0^T P_0 e^{kt} dt = \frac{P_0}{k} (e^{kT} - 1)$$

利用上式, 我们可以处理一些简单的资源需求或消耗的实际问题, 例如下面两个例子

例 1 铜的需求问题 在 1997 年 ($t=0$), 世界上铜的消耗量是 11300000 吨, 而铜的需求正在以每年 15% 的比例呈指数增长. 如果继续以这个比例增长, 那么从 1997 年到 2010 年世界上将消耗多少吨铜?

解 因为从 1997 到 2010 所跨时间区间为 13 年, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{13} 11300000 e^{0.15t} dt &= \frac{11300000}{0.15} (e^{(0.15) \times 13} - 1) \\ &\approx 75333333 (e^{1.95} - 1) \\ &\approx 454161000 \end{aligned}$$

因此, 从 1997 年到 2010 年, 世界上将消耗约 454161000 吨铜.

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x t
>> vpa(int(11300000*exp(0.15*t),t,0,13),6)
ans =
.454161e9
>> x=.454161e9
x =
454161000
>>
```

例 2 铜矿石的消耗问题 1997 年世界上的铜矿石的储藏量估计为 2300000000 吨, 假设铜的需求正在以每年 15% 的比例呈指数增长, 而又没有发现新的储藏量, 那么世界上储藏的

铜矿石何时会被开采尽?

解 铜矿石被开采尽相当于将 2300000000 吨储藏量消耗完, 于是有

$$2300000000 = \frac{11300000}{0.15}(e^{0.15T} - 1) \approx 75333333(e^{0.15T} - 1)$$

整理得

$$31.530974 = e^{0.15T}$$

两边取对数有

$$\ln 31.530974 = 0.15T$$

于是解得

$$T \approx 23$$

因此大约经过 $1997+23=2020$ 年, 世界上储藏的铜矿石将被开采尽.

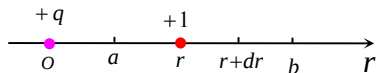
MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms T
>> vpa(solve('2300000000=(11300000/0.15)*(exp(0.15*T)-1)','T'),2)
ans =
23.
>>
```

此外, 利用我们在 6.1 中介绍的积分的元素法, 还可以处理一些物理学上如变力沿直线做功、水压力、引力等问题, 处理这些问题的关键是构造出功元素、压力元素和引力元素. 如下面几个例子.

例 3 变力沿直线做功问题 从物理学知道, 如果物体在作直线运动过程中有一个不变的力 F 作用于该物体, 且力的方向与物体运动的方向一致, 则物体移动了距离 s 时力 F 作的功为 $W = F \cdot S$, 但如果力不是恒力而是变力, 又该如何来计算变力所作的功呢? 比如坐标原点有一电量为 $+q$ 的电荷, 电场力 $F = k \frac{q}{r^2}$ 为变力, 如何求单位正电荷从 a 移动到 b 处电场力对其所作的功?

解 在 r 轴上, 当单位正电荷从 r 移动到 $r+dr$ 时, 电场力对它所作的功近似为 $k \frac{q}{r^2} dr$, 即功元素为



$$dW = k \frac{q}{r^2} dr.$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b k \frac{q}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms a b k q r;
>> int(k*q/(r^2),r,a,b)
ans =
-k*q*(-b+a)/b/a
>>
```

例4 水压力问题 从物理学知道, 在水深为 h 处的压强为 $p=\gamma h$, 这里 γ 是水的比重. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处, 那么平板一侧所受的水压力为 $P=p \cdot A$; 而如果这个平板铅直放置在水中, 那么由于水深不同的点处压强 p 不相等, 所以平板所受水的压力就不能用上述方法计算. 比如一个横放着的圆柱形水桶, 桶内盛有半桶水, 设桶的底半径为 R , 水的比重为 γ , 那么我们该怎样计算桶的一端面上所受的压力呢?

解 桶的一个端面是圆片, 与水接触的是下半圆. 如图 6-7 所示在水深 x 处于圆片上取一窄条, 其宽为 dx , 得压力元素为

$$dP = 2\gamma x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

所求压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\gamma x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\gamma \int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - x^2) \\ &= -\gamma \left[\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{2\gamma}{3} R^3 \end{aligned}$$

MATLAB 运算过程及结果:

```
>> syms x R r; %由于 MATLAB 中  $\gamma$  输入较麻烦, 故用 r 代替
>> int(2*r*x*sqrt(R^2-x^2),x,0,R)
ans =
2/3*(R^2)^(3/2)*r
>>
```

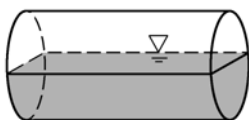


图 6-6

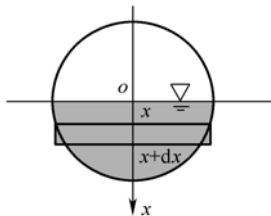


图 6-7

例5 引力问题 从物理学知道, 质量分别为 m_1 、 m_2 , 相距为 r 的两质点间的引力的大小为 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, 其中 G 为引力系数, 引力的方向沿着两质点连线方向. 但如果要计算一根细棒对一个质点的引力, 由于细棒上各点与该质点的距离是变化的, 且各点对该质点的引力的方向也是变化的, 就不能用上述公式来计算. 比如设有一长度为 l , 线密度为 ρ 的均匀细直棒, 在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M , 我们该如何计算该棒对质点 M 的引力?

解 取坐标系如图 6-8 所示, 使棒位于 y 轴上, 质点 M 位于 x 轴上, 棒的中点为原点 O . 由对称性知, 引力在垂直方向上的分量为零, 所以只需求引力在水平方向的分量. 取 y 为积分变量, 它的变化区间为 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$, 在 $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ 上 y 点取长为 dy 的一小段, 其质量为 ρdy , 与 M 相距 $r = \sqrt{a^2 + y^2}$. 于是在水平方向上引力元素为

$$dF_x = G \frac{m\rho dy}{a^2 + y^2} \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = -G \frac{am\rho dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}.$$

引力在水平方向的分量为

$$F_x = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} G \frac{am\rho dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{2Gm\rho l}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2 + l^2}}.$$

特别地, 当 $l \rightarrow +\infty$ 时

$$F_x = -\int_{-\infty}^{+\infty} G \frac{am\rho dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2Gm\rho}{a}.$$

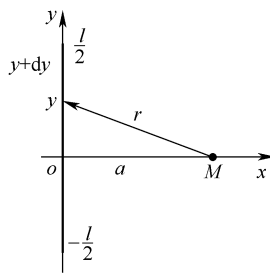


图 6-8

MATLAB 运算过程及结果:

先求 F_x

```
>> syms a m p y l G; %这里用 p 代替 ρ
```

```
>> int(G*(a*m*p)/(a^2+y^2)^(3/2),y,-l/2,l/2)
```

```
ans =
```

```
2*G/a*m*p*l/(4*a^2+l^2)^(1/2)
```

```
>>
```

特别地, 当 $l \rightarrow +\infty$ 时

```
>> int(G*(a*m*p)/(a^2+y^2)^(3/2),y,-inf,inf)
```

```
ans =
```

```
2*G*a*m*p/(a^2)^(3/2)/(1/a^2)^(1/2)
```

```
>>
```

习题 6.3

1. 在 2001 ($t=0$) 年, 铝土矿的需求是 135.7 百万吨, 而且需求量正以每年 3.9% 的比率呈指数增长. 如果需求持续以这个比率增长, 试问由 2001 年到 2030 年世界上将消耗多少吨铝土矿?

2. 由实验可知, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F (单位: N) 与伸长量 s (单位: cm) 成正比, 即 $F = ks$ (k 是比例常数), 如果把弹簧由原长拉伸 6cm, 计算所作的功.

3. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10cm 和 6cm, 高为 20cm. 较长的底边与水面相齐, 计算闸门一侧所受的水压力.

4. 设有一长为 l , 线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M , 试求这细棒对质点 M 的引力.

总习题六

1. 求由下列曲线所围图形的面积:

(1) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$

(2) $y = \ln x$, $x = 0$, $y = \ln a$, $y = \ln b$ ($b > a > 0$)

2. 已知边际成本为 $C'(x) = 7 + \frac{25}{\sqrt{x}}$, 固定成本为 1000, 求总成本函数.
3. 已知边际成本为 $C'(x) = 100 - 2x$, 求当产量由 $x = 20$ 增加到 $x = 30$ 时, 应追加的成本数.
4. 在 1970 年到 2001 年之间, 每年世界上石油的需求量由 171 亿桶增长到 277 亿桶.
- (1) 设定一个指数增长模型, 计算增长率.
- (2) 预测 2020 年的消费量.
- (3) 在 2001 年 1 月 1 日世界上原油的储藏量是 10040 亿桶. 假设没有发现新的石油, 世界上石油的储藏量何时被用尽?
5. 一物体按规律 $x = ct^3$ 作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比, 计算物体由 $x = 0$ 移至 $x = a$ 时, 克服介质阻力所作的功.
6. 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?